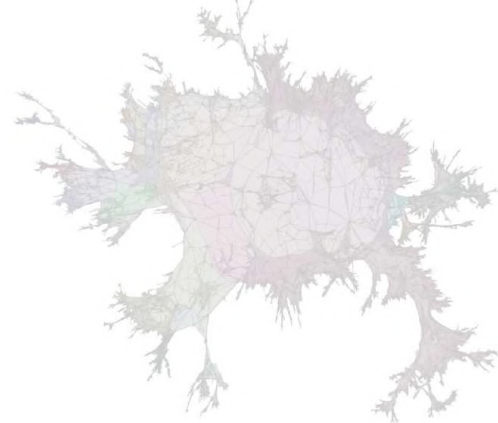




INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS



Mémoire présenté pour l'obtention du
Diplôme d'habilitation à diriger des recherches

Spécialité : Mathématiques

par

Jérémie BETTINELLI

Limite d'échelle et combinatoire bijective de cartes



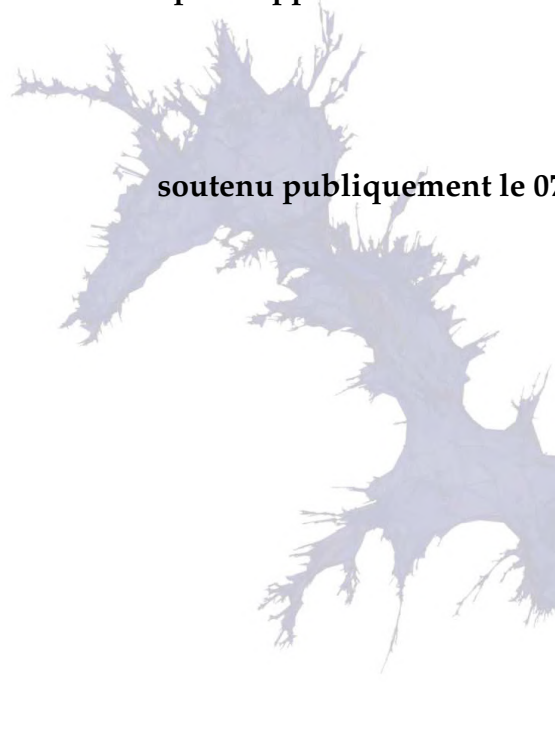
après rapports de

Mireille BOUSQUET-MÉLOU
Philippe CHASSAING
Jean-François LE GALL

soutenu publiquement le 07/06/2022 devant un jury composé de

Frédérique BASSINO
Mireille BOUSQUET-MÉLOU
Philippe CHASSAING
Bénédicte HAAS
Jean-François LE GALL
Jean-François MARCKERT
Sylvie MÉLÉARD
Gilles SCHAEFFER

Examinatrice
Rapporteuse
Rapporteur
Examinatrice
Rapporteur
Examineur
Examinatrice
Examineur



Jérémie BETTINELLI

jeremie.bettinelli@normalesup.org

[nsup.org/~bettinel](https://normalesup.org/~bettinel)



*Normal is not the norm
It's just a uniform*

DELAIN, *We Are The Others.*

Remerciements

Merci.

Remerciements (un peu plus détaillés)

S I J'EN SUIS ARRIVÉ LÀ, c'est certainement grâce à de nombreuses personnes que je tiens à remercier chaleureusement. En premier lieu, je remercie tout particulièrement Grégory qui a encadré avec exemplarité mes premiers pas dans la recherche et avec qui les discussions sont toujours passionnantes et bienveillantes. Je remercie en outre Jean-François qui m'a fait découvrir les probabilités à travers d'excellents cours et a toujours veillé sur mon parcours professionnel. Je suis très honoré et reconnaissant que tu aies accepté de rapporter ce manuscrit.

IL ME TIENT À CŒUR de remercier chaleureusement Mireille et Philippe pour avoir également accepté d'écrire des rapports sur ce manuscrit; votre enthousiasme m'a sincèrement touché. Merci encore Frédérique, Mireille, Philippe, Bénédicte, Jean-François, Jean-François, Sylvie, Gilles, de constituer le jury de soutenance; vos travaux, que j'admire, m'inspirent et votre présence aujourd'hui m'honore.

MES REMERCIEMENTS SUIVANTS vont à mes coautrices, mes coauteurs et mes collègues, pour des collaborations agréables, des discussions captivantes, et des instants de vie partagés. Merci pour cette bonne ambiance en communauté à domicile et à travers le monde au rythme des séminaires et autres conférences. Merci au personnel administratif des divers endroits que j'ai fréquenté pour avoir facilité à de nombreuses reprises mes démarches.

ON PASSE MAINTENANT aux amies et amis ne rentrant pas dans les catégories précédentes, que je remercie pour les moments de jeu et de joie passés ensemble et pour leur soutien dans les moments plus difficiles. J'en profite pour remercier au passage les muses qui peuplent mes songes, Ailyn, Bruce, Charlotte, Joacim, Sabine, Sharon, Tarja, et tant d'autres.

NATURELLEMENT, ON TERMINE par la famille. Merci à vous qui me soutenez. Un grand merci tout particulièrement à toi, Nina, qui me comprend mieux que quiconque et a su m'accompagner tout au long de ces années passées ensemble. Enfin, merci à vous, Léo et Simon, pour faire partie de ma vie et pour tant égayer mon quotidien.

Résumé et liste de publications

LA PLUPART DES RÉSULTATS concernant les cartes que nous avons obtenus au cours des années 2009–2020 sont présentés de manière synthétique dans ce document. Ils sont extraits des références qui suivent et s’articulent essentiellement autour de deux grands axes interconnectés : les limites d’échelle et la combinatoire bijective.

Les résultats issus de ma thèse sont signalés à l’aide d’un fond bleu.

Les résultats originaux postérieurs sont signalés à l’aide d’un fond rouge.

ÉTANT DONNÉE UNE CARTE ALÉATOIRE distribuée selon une certaine loi (typiquement uniforme sur une classe donnée d’objets de *taille* fixée, par exemple les triangulations du tore à n faces), on regarde sa limite lorsque la taille tend vers l’infini. On voit les objets considérés comme des espaces métriques compacts et on renormalise les distances (d’où le terme *échelle*) de sorte à conserver une limite compacte et non triviale. C’est ainsi que nous définissons les *surfaces browniennes*, qui généralisent la fameuse *sphère brownienne* de Jean-François Le Gall et Grégory Miermont. Nous présentons cette approche dans le premier chapitre.

ON S’INTÉRESSE DANS LE SECOND CHAPITRE à la combinatoire bijective sur les cartes, à travers deux types de bijections. D’une part, les bijections que nous pouvons qualifier de bijections *de codage*, servent à coder un objet combinatoirement compliqué (typiquement une carte) par un objet plus simple (typiquement une carte à une seule face munie d’étiquettes sur ses sommets). Nous présentons ces bijections et précisons la méthodologie pour l’étude des surfaces browniennes qui se base sur ces dernières. D’autre part, nous présentons des bijections que nous appelons de type *slit-slide-sew* entre classes de cartes similaires où les paramètres sont très légèrement modifiés (par exemple, une face a un degré augmenté de 1 et une autre a un degré diminué de 1).

Voici la liste de mes publications. Les références à celles-ci sont faites à l'aide de crochets colorés. Les trois publications issues de ma thèse sont signalées par le symbole ^T.

Limite d'échelle de cartes

- [BCFS21] **Nonbijective scaling limit of maps via restriction**
with N. Curien, L. Fredes, A. Sepúlveda. *Preprint*, [arXiv:2104.12716](#)
- [BM17] **Compact Brownian surfaces I. Brownian disks**
with G. Miermont. *Probability Theory and Related Fields*, **167**, 555–614 (2017)
- [Bet16a] **Geodesics in Brownian surfaces (Brownian maps)**
Annales de l'Institut Henri Poincaré, **52**, 612–646 (2016)
- [BJM14] **The Scaling Limit of Uniform Random Plane Maps, via the Ambjørn–Budd Bijection**
with E. Jacob and G. Miermont. *Electronic Journal of Probability*, **19**, no. 74, 1–16 (2014)
- [Bet15]^T **Scaling Limit of Random Planar Quadrangulations with a Boundary**
Annales de l'Institut Henri Poincaré, **51**, 432–477 (2015)
- [Bet12]^T **The Topology of Scaling Limits of Positive Genus Random Quadrangulations**
The Annals of Probability, **40**, 1897–1944 (2012)
- [Bet10]^T **Scaling Limits for Random Quadrangulations of Positive Genus**
Electronic Journal of Probability, **15**, 1594–1644 (2010)

Combinatoire bijective sur les cartes

- [Bet22] **A bijection for nonorientable general maps**
Short. FPSAC 2016. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc.*, **BC**, 227–238 (2016)
Annales de l'Institut Henri Poincaré (D), to appear (2021)
- [Bet20] **Slit-slide-sew bijections for bipartite and quasibipartite plane maps**
Short. FPSAC 2019. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **82B**, Art. 82, 1–12 (2019)
Electronic Journal of Combinatorics, **27(3)**, P3.4, 1–23 (2020)
- [Bet14] **Increasing Forests and Quadrangulations via a Bijective Approach**
Journal of Combinatorial Theory, Series A, **122**, 107–125 (2014)

Autres résultats

Ces publications ne seront pas présentées dans ce mémoire.

- [Bet18] **Convergence of uniform noncrossing partitions toward the Brownian triangulation**
FPSAC 2018. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **80B**, Art. 38, 1–12 (2018)
- [BFMR16] **A bijective study of basketball walks**
with É. Fusy, C. Mailler, L. Randazzo. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **77**, Art. B77a, 1–24 (2016)
- [Bet16b] **A simple explicit bijection between $(n, 2)$ Gog and Magog trapezoids**
Séminaire Lotharingien de Combinatoire, **75**, Art. B75e, 1–9 (2016)

Table des matières

Résumé et liste de publications	1
Table des matières	3
1 Limite d'échelle de cartes aléatoires	5
1.1 Cartes	5
1.2 Très bref historique	8
1.3 La sphère brownienne	10
1.3.1 Présentation	10
1.3.2 Universalité	13
1.3.3 Dimension de Hausdorff et topologie	15
1.4 Surfaces browniennes	15
1.4.1 Surfaces orientables sans bord	15
1.4.2 Surfaces orientables à bord	17
1.4.3 Universalité du disque brownien	19
1.4.4 Limites d'échelle par restriction	24
1.5 Géodésiques	27
1.5.1 Géodésiques dans les surfaces browniennes	27
1.5.2 Géodésiques dans les grandes quadrangulations	32
2 Combinatoire bijective	35
2.1 Codage bijectif des cartes par des objets plus simples	35
2.1.1 La bijection originelle	36
2.1.2 Quadrangulations sur une surface orientable	39
2.1.3 Cartes biparties sur une surface orientable	39
2.1.4 Cartes biparties sur une surface non orientable	41
2.1.5 Cartes non biparties	52
2.2 Construction des surfaces browniennes et méthodologie	56
2.2.1 Existence de limites	56
2.2.2 Unicité de la limite	63
2.2.3 Sphère brownienne et constructions alternatives dans le cas du disque	69
2.3 Approches bijectives sur les cartes	70
2.3.1 Présentation	70
2.3.2 Ajout de deux coins	75
2.3.3 Transfert d'un coin	79
Bibliographie	87

1

Limite d'échelle de cartes aléatoires

Un des pans principaux de mes recherches, initié lors de ma thèse, concerne les limites d'échelle de cartes aléatoires plongées dans des surfaces à bord. Nous établissons l'existence de limites d'échelle pour certaines classes de cartes et nous nous intéressons à certaines propriétés topologiques et métriques de ces espaces limites. Ce chapitre introduit et présente les principaux résultats de [Bet10, Bet12, Bet15, BJM14, Bet16a, BM17, BCFS21, BM22]. Des détails sur les méthodes de preuve seront donnés au cours de la section 2.2 du chapitre suivant.

1.1	Cartes	5
1.2	Très bref historique	8
1.3	La sphère brownienne	10
1.3.1	Présentation	10
1.3.2	Universalité	13
1.3.3	Dimension de Hausdorff et topologie	15
1.4	Surfaces browniennes	15
1.4.1	Surfaces orientables sans bord	15
1.4.2	Surfaces orientables à bord	17
1.4.3	Universalité du disque brownien	19
1.4.4	Limites d'échelle par restriction	24
1.5	Géodésiques	27
1.5.1	Géodésiques dans les surfaces browniennes	27
1.5.2	Géodésiques dans les grandes quadrangulations	32



1.1 Cartes

Commençons par définir les objets dont il sera largement question. Nous le faisons ici de la façon la plus géométrique. Pour d'autres définitions, ainsi que la preuve de l'équivalence de ces définitions, nous référons au livre de Bojan Mohar et Carsten Thomassen [MT01]. La définition précise est un peu longue, mais les objets sont finalement très intuitifs. Afin de saisir facilement le concept, on peut garder à l'esprit la notion de carte géographique, qui donne un découpage en zones géographiques. On considère pour l'instant une surface $\mathcal{S}$ choisie parmi les surfaces suivantes : la sphère, le tore, le double tore, le triple tore, etc. Rappelons que le *genre* d'une telle surface est son nombre d'anses ; voir la figure 1.1.

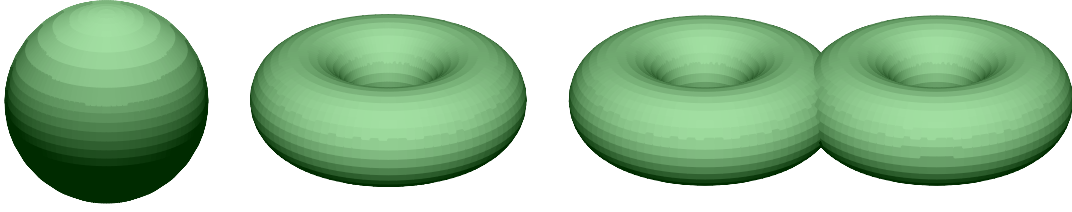


FIGURE 1.1. La sphère (genre 0), le tore (genre 1) et le double tore (genre 2).

On considère de plus un graphe, c'est-à-dire un ensemble de sommets et un ensemble d'arêtes qui relient les sommets, dessiné sans que les arêtes se croisent sur la surface S choisie. Cela délimite des « zones » que l'on nommera faces. Une carte est un tel dessin de graphe sur une surface qui vérifie la condition que chaque face est un polygone. Par exemple, la figure 1.2 représente bien une carte. Si, en revanche, on n'avait dessiné que la face f , on n'aurait pas obtenu une carte car notre dessin aurait eu deux faces, f et son complémentaire, et le complémentaire de f n'est pas un polygone car il contient une anse... Autrement dit, on peut voir les cartes comme des recollements de polygones le long de leurs bords, de sorte à obtenir la surface désirée. Sur la figure 1.2 par exemple, on a recollé le triangle f , un heptagone et un octogone, de sorte à obtenir un tore.

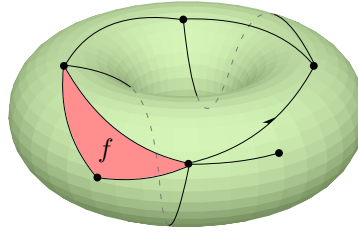


FIGURE 1.2. Exemple de carte de genre 1 ayant 6 sommets, 9 arêtes et 3 faces. La face f mise en valeur est de degré 3. La racine est symbolisée à l'aide d'une demi-pointe de flèche.

Plus précisément, un *graphe* est la donnée d'un triplet (V, E, i) , où V et E sont des ensembles finis dont les éléments sont appelés respectivement *sommets* et *arêtes*, et i associe à chaque arête un ou deux sommets du graphe, appelés ses *extrémités*. Les arêtes n'ayant qu'une seule extrémité sont appelées *boucles*. Notons que deux arêtes distinctes peuvent avoir les mêmes extrémités : on parle dans ce cas d'*arêtes multiples*. Attention au fait que cette notion diffère de la notion de graphe que l'on rencontre traditionnellement en théorie des graphes, elle correspond plutôt à la notion de *multigraphe fini* dans ce contexte.

Un graphe (V, E, i) est *plongé* dans la surface S si $V \subseteq S$ et, pour toute arête $e \in E$, il existe une application continue $\varphi_e : [0, 1] \rightarrow S$ telle que¹ sa restriction à $[0, 1)$ soit injective, $i(e) = \{\varphi_e(0), \varphi_e(1)\}$, $\varphi_e([0, 1]) = e$, et $\varphi_e((0, 1)) \cap \varphi_{e'}([0, 1]) = \emptyset$ pour tout $e' \neq e$. Autrement dit, le graphe est dessiné sur la surface, de telle façon que les arêtes ne s'intersectent éventuellement qu'en les sommets du graphe. Les *faces* d'un graphe plongé (V, E, i) sont les composantes connexes du complémentaire de l'ensemble

$$\bigcup_{e \in E} \varphi_e([0, 1]).$$

Un graphe est plongé de façon *cellulaire* si toutes ses faces sont des 2-cellules ouvertes, c'est-à-dire homéomorphes à des disques ouverts de $\mathbb{R}^2$. Notons que cela présuppose que le graphe soit connexe,

1. On utilise des parenthèses pour les inégalités strictes dans les intervalles, par exemple $[0, 1) = \{s : 0 \leq s < 1\}$.

et, dans le cas où la surface est la sphère, tout graphe connexe plongé l'est automatiquement de façon cellulaire, par le théorème de Jordan–Schoenflies. On dit que deux graphes plongés de façon cellulaire sont *équivalents* s'il existe un homéomorphisme des surfaces sous-jacentes qui préserve l'orientation et induit un isomorphisme des graphes.

Définition 1.1 $\Leftarrow$ *carte* $\Rightarrow$

Une *carte* est une classe d'équivalence de graphes plongés de façon cellulaire.

Remarquons en particulier que les surfaces sous-jacentes de deux plongements cellulaires homéomorphes sont elles-même homéomorphes, et ont donc même genre. Le *genre* d'une carte est alors défini comme le genre de la surface sous-jacente d'un de ses représentants. Dans le cas où le genre est 0, on peut plonger les cartes dans le plan plutôt que dans la sphère. Cela revient à distinguer une face particulière qui correspond à la composante non bornée du plan. Pour cette raison, on appelle souvent *cartes planes* ou *cartes planaires* les cartes de genre 0.

L'information contenue dans le graphe sous-jacent d'une carte ne détermine pas la carte. En effet, il est possible de plonger de façon cellulaire un même graphe de sorte à obtenir des cartes différentes (éventuellement même de genres différents), comme on peut le voir sur la figure 1.3.

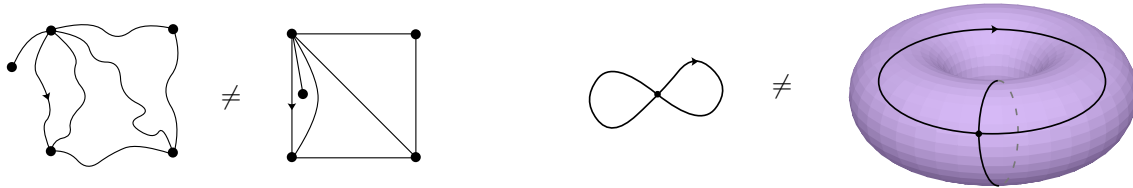


FIGURE 1.3. Deux exemples de cartes différentes ayant le même graphe sous-jacent.

Il faut aussi garder à l'esprit qu'un homéomorphisme entre deux graphes plongés n'est pas nécessairement homotope à l'identité. La déformation des arêtes peut être plus subtile que l'on pense. L'exemple classique est celui d'un *twist de Dehn*, homéomorphisme qui consiste à couper le tore selon l'un de ses cycles générateurs, faire un tour, et recoller. Cela se voit mieux dans le revêtement universel du tore, où l'on fait simplement une translation selon un des axes.

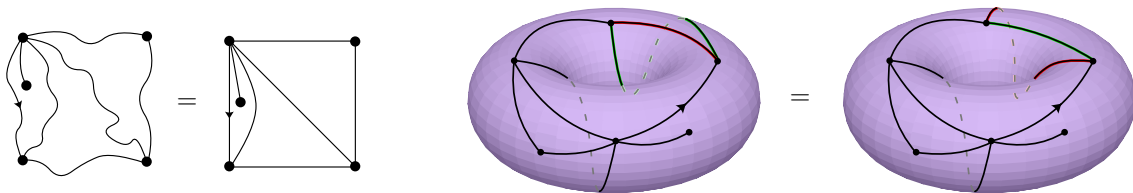


FIGURE 1.4. Deux exemples de représentants de la même carte. À droite, un twist de Dehn permet de passer d'un plongement à l'autre : l'arête verte se voit « déroulée » et la rouge « enroulée ».

Toutes les arêtes possèdent naturellement deux orientations. On appelle *demi-arête* une arête munie d'une de ces deux orientations. Implicitement, toutes les cartes que l'on considère seront enracinées : cela signifie que l'on distingue une demi-arête que l'on appelle *racine*. Sur les figures, on représentera toujours la racine à l'aide d'une pointe de flèche ou d'une demi-pointe de flèche. L'enracinement des cartes permet de supprimer les symétries non triviales car un homéomorphisme d'un graphe plongé de façon cellulaire sur lui-même qui fixe une demi-arête fixe toutes les demi-arêtes.

On dit qu'une demi-arête e est *incidente* à une face f (ou indifféremment que f est *incidente* à e) si e borde f et est orientée de telle sorte que f se situe à la gauche de e . On appelle *degré* d'une face le nombre de demi-arêtes qui lui sont incidentes. Remarquons notamment que les deux demi-arêtes correspondant à une arête peuvent très bien être incidentes à la même face. Dans ce cas, il faudra veiller à compter deux fois cette arête pour déterminer le degré de la face qui leur est incidente.

Nous serons souvent amenés à considérer des cartes biparties : une carte est *bipartie* si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles de telle sorte que chaque arête relie un sommet d'un sous-ensemble à un sommet de l'autre sous-ensemble. De manière équivalente, une carte est bipartie si et seulement si chaque cycle composé d'arêtes dans la carte a un nombre pair d'arêtes².

Soit $\mathbf{m}$ une carte de genre g . On note respectivement $V(\mathbf{m})$, $E(\mathbf{m})$, et $F(\mathbf{m})$ les ensembles de ses sommets, arêtes, et faces. Les cardinaux de ces ensembles sont reliés par la célèbre formule d'Euler :

$$|V(\mathbf{m})| - |E(\mathbf{m})| + |F(\mathbf{m})| = 2 - 2g,$$

où l'on note $|A|$ le cardinal d'un ensemble fini A . Ainsi, il suffit d'une relation supplémentaire pour déterminer toutes ces quantités dès lors que l'on en connaît une. Si, par exemple, $\mathbf{q}$ est une *quadrangulation*, c'est-à-dire une carte dont toutes les faces ont degré 4, alors $4|F(\mathbf{q})| = 2|E(\mathbf{q})|$ puisque, par définition, chaque face est incidente à exactement 4 demi-arêtes et chaque arête correspond à 2 demi-arêtes. Une quadrangulation à n faces a donc $2n$ arêtes, $4n$ demi-arêtes, et $n + 2 - 2g$ sommets.

1.2 Très bref historique

NÉE DANS LES ANNÉES 1960 avec les travaux de William Tutte qui s'intéresse à la fameuse conjecture (devenue théorème depuis) des quatre couleurs, l'énumération des cartes est aujourd'hui un domaine de recherche très foisonnant. William Tutte obtient tout d'abord de nombreuses formules combinatoires pour l'énumération des cartes planes [Tut62a, Tut62b, Tut62c, Tut63]. En genre quelconque, Timothy Walsh et Alfred Lehman obtiennent, à l'aide de décompositions récursives, les premières formules énumératives [WL72a, WL72b, WL75]. Par la suite, Edward Bender et Rodney Canfield adaptent l'approche de William Tutte et obtiennent des formules asymptotiques pour les nombres de cartes de genre fixé [BC86, BC91, BCR93].

Par ailleurs, on retrouve les cartes dans diverses branches de la physique théorique. Dans les années 1970, Gerardus 't Hooft [tH74], puis Édouard Brézin, Claude Itzykson, Giorgio Parisi et Jean-Bernard Zuber [BIPZ78], mettent en relation les problèmes d'énumération de cartes en genre quelconque avec des modèles d'intégrales de matrices. Ceci généra par la suite de nombreux travaux sur le sujet, en raison des liens existant avec notamment la physique statistique, la géométrie algébrique, et la théorie des représentations ; voir par exemple [LZ04, Bou05]. Plus récemment, les cartes ont été utilisées en physique théorique comme un moyen de discrétiser une surface dans le cadre de la gravité quantique 2-dimensionnelle [ADJ97]. On renvoie à [LG14, LGM12, Mie14] pour un tour d'horizon de ces aspects.

INTRIGUÉS PAR LA SIMPLICITÉ de certaines formules énumératives obtenues par la méthode de William Tutte malgré sa complexité calculatoire, Robert Cori et Bernard Vauquelin [CV81], puis par la suite Gilles Schaeffer [Sch98], sont amenés à développer des approches bijectives pour compter les cartes, les mettant en bijection avec des objets structurellement moins complexes. Exploitant ces approches, Philippe Chassaing et Gilles Schaeffer [CS04] donnent la limite d'échelle de certaines fonctionnelles des quadrangulations planes uniformes. En particulier, ils étudient le *profil* de

2. C'est un fait classique en théorie des graphes. Si un graphe est biparti, les sommets le long de n'importe quel cycle alternent entre les deux sous-ensembles, de sorte que le cycle doit avoir une longueur paire. À l'inverse, la parité des distances à un sommet fixé du graphe donne une partition satisfaisante : en effet, si les distances au sommet fixé de deux sommets voisins avaient la même parité, on aurait un cycle de longueur impaire.

la carte, qui donne le nombre de sommets en fonction de leur distance à un sommet distingué, ainsi que son *rayon*, défini comme la distance maximale d'un sommet au sommet distingué. Ils montrent notamment que, dans une carte choisie uniformément parmi les quadrangulations planes à n faces, le profil et rayon admettent une limite en loi, une fois que les distances sont renormalisées par le facteur $n^{-1/4}$.

Jean-François Marckert et Abdelkader Mokraddem [MM06] se sont ensuite intéressés au problème de la convergence des quadrangulations planes uniformes dans leur ensemble, en considérant les cartes comme des espaces métriques munis de leur distance de graphe, renormalisée par $n^{-1/4}$. Ils construisent un espace métrique limite, qu'ils appellent *carte brownienne*, et montrent la convergence, dans un certain sens, des espaces discrets vers ce dernier. Le problème naturel de convergence au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff [Gro99], qui avait été formulée pour la première fois par Oded Schramm [Sch07] dans le contexte légèrement différent des triangulations, a été résolu indépendamment par Grégory Miermont [Mie13] et par Jean-François Le Gall [LG13]. Ces deux travaux utilisent le résultat précédent de Jean-François Le Gall [LG07] montrant la convergence à extraction près.

Sans connaître le résultat de [LG13, LG07], on peut néanmoins obtenir certaines informations sur cet espace limite (ou plutôt, dans le contexte antérieur à 2011, de n'importe quelle espace limite possible). Jean-François Le Gall [LG07] montre que sa dimension de Hausdorff est presque sûrement égale à 4 et, avec Frédéric Paulin [LGP08], qu'il est presque sûrement homéomorphe à la sphère S^2 de $\mathbb{R}^3$. C'est la raison pour laquelle on peut parler maintenant de *sphère brownienne* plutôt que de *carte brownienne* pour désigner cet espace métrique. Ce dernier résultat de sphéricité est également obtenu par Grégory Miermont [Mie08] à l'aide d'une autre approche.

NOMBREUSES ONT ÉTÉ LES GÉNÉRALISATIONS de ces méthodes bijectives. La bijection de Cori–Vauquelin–Schaeffer a été étendue par Jérémie Bouttier, Philippe Di Francesco et Emmanuel Guitter [BDG04] en une bijection plus générale permettant entre autres de coder toutes les cartes planes. Pour être un peu plus précis, Jean-François Le Gall utilise en fait dans [LG07, LG13] cette généralisation (dans le cas biparti) et traite les limites d'échelle des 2κ -angulations, pour $\kappa \geq 2$. Pour les surfaces orientables, Guillaume Chapuy, Michel Marcus et Gilles Schaeffer [CMS09] étendent la bijection de Cori–Vauquelin–Schaeffer afin de coder les quadrangulations biparties de genre donné. Les techniques de [BDG04] et [CMS09] sont « compatibles » au sens où l'on peut les associer pour obtenir le codage des cartes générales sur une surface orientable [Cha09]. Plus récemment, Guillaume Chapuy et Maciej Dołęga [CD17] ont généralisé la bijection au cas des quadrangulations biparties d'une surface non orientable.

Une autre généralisation a été obtenue par Grégory Miermont [Mie09] entre les quadrangulations biparties de genre $g \geq 0$ ayant un nombre fixé $k \geq 1$ de sommets distingués et les cartes de même genre à k faces, le cas $k = 1$ de cette bijection correspondant à la bijection de Chapuy–Marcus–Schaeffer. Cette bijection permet notamment de montrer la compacité relative de la famille des distributions de Boltzmann–Gibbs des quadrangulations biparties, prise dans la bonne échelle, ainsi que l'unicité des géodésiques typiques dans les espaces limites. Une autre application importante de cette bijection est le calcul par Jérémie Bouttier et Emmanuel Guitter [BG08] de la fonction à trois points dans la sphère brownienne, c'est-à-dire de la distribution des distances entre 3 points pris uniformément dans la sphère brownienne. Mentionnons aussi au passage que cette bijection constitue un ingrédient important dans la preuve de Grégory Miermont [Mie13] de l'unicité de la sphère brownienne. Par ailleurs, Jan Ambjørn et Timothy Budd [AB13] obtiennent une autre bijection intéressante en utilisant les règles de la bijection de Cori–Vauquelin–Schaeffer de façon inversée. Une généralisation aux hypercartes est également obtenue dans [BFG14].

Il existe une autre famille de bijections codantes, appelées *bijection bourgeonnantes*. Le cas de la sphère est aujourd'hui bien compris [Sch97, BDG02, BMS02, Ber07, PS06, BF12a, BF12b, AP15]. Pour les autres surfaces, les résultats sont rares et n'existent que pour le tore [DGL17, Lep19]. Pour l'étude

des cartes d'un point de vue métrique, ces bijections sont plus complexes à manipuler car l'information géométrique n'apparaît pas aussi clairement que dans celles de l'autre famille. Néanmoins, certains résultats de limite d'échelle ont été obtenus à l'aide de ces bijections [ABA17, BCF14, BHL19, AHS20].

APRÈS LA SOLUTION du problème de limite au sens de Gromov–Hausdorff, de nombreux travaux ont montré que la sphère brownienne apparaît comme limite d'échelle de diverses classes de cartes planes uniformes [LG13, BLG13, BJM14, ABA17, Abr16, ABA20, Mar20]. On peut alors se demander s'il est possible de construire une limite d'échelle différente, en choisissant convenablement la loi des cartes. Jean-François Le Gall et Grégory Miermont [LGM11] ont montré que cela était possible lorsque l'on favorise les « grandes » faces en imposant que le degré d'une face typique soit dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in (1, 2)$. Dans ce cas, le facteur d'échelle qui apparaît est $n^{-1/2\alpha}$, et la limite est un espace métrique aléatoire appelé *carte stable*, presque sûrement de dimension de Hausdorff 2α . Mentionnons par ailleurs qu'il existe des versions non compactes de la sphère brownienne appelées *plan brownien* [CLG13] et *demi-plan brownien* [BMR19], qui peuvent s'obtenir en renormalisant les cartes par un facteur d'échelle « trop grand » par rapport à $n^{-1/4}$.

La sphère brownienne étant topologiquement une sphère, il est naturel de chercher un homéomorphisme canonique vers la sphère usuelle de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, on s'attend à ce qu'un homéomorphisme canonique possède une certaine structure conforme. Pour cela, c'est la *théorie de la gravité quantique de Liouville* qui a été utilisée. Introduite par Alexander Polyakov [Pol81] dans la littérature physique, elle a été définie mathématiquement par Bertrand Duplantier et Scott Sheffield [DS11] : en simplifiant grossièrement, c'est l'exponentielle d'un champ libre gaussien. Une construction basée sur le chaos multiplicatif gaussien de Jean-Pierre Kahane [Kah85] a plus tard été étudiée [Ber17, DKRV16]. Cela permet d'équiper une surface d'une mesure d'aire aléatoire canonique qui produit une structure conforme.

On a alors, d'une part, une mesure d'aire mais pas de métrique dans la théorie de la gravité quantique de Liouville et, d'autre part, une métrique mais pas de mesure d'aire avec la sphère brownienne. L'unification de ces deux théories a été obtenue par Jason Miller et Scott Sheffield dans la série d'articles [MS21a, MS20, MS21b, MS21c] où ils obtiennent un couplage entre la sphère brownienne et la théorie de la gravité quantique de Liouville pour un certain paramètre. Cette construction s'opère dans le continu et se pose alors la question d'un plongement canonique d'une carte sur la sphère qui soit compatible avec la convergence de la suite. Un tel résultat a récemment été obtenu par Nina Holden et Xin Sun [HS21], qui ont montré la convergence jointe de la métrique et de la mesure d'aire générées par une triangulation plane uniforme plongée via le plongement de Cardy dans un triangle équilatéral (plongement utilisé par Stanislav Smirnov en théorie de la percolation dans sa célèbre preuve de la formule de Cardy). On renvoie à l'article de survol [GHS19] pour plus de détail sur ce problème.

1.3 La sphère brownienne

1.3.1 Présentation

On fixe une surface, disons la sphère pour commencer, et on se demande à quoi ressemble une « grande carte aléatoire » de cette surface. Il faut déjà préciser ce qu'on entend par *aléatoire* car il y a plusieurs façons de procéder. Sur la figure 1.5 par exemple, on a pris une carte uniformément au hasard parmi toutes les cartes de la sphère à 50 000 arêtes, c'est-à-dire que toutes les cartes de la sphère à 50 000 arêtes ont la même probabilité d'être choisies. On voit tout de suite sur la figure que la sphère est fortement déformée... Précisons un peu comment la figure représente la carte. Il s'agit d'une surface représentée en 3d et le logiciel essaie de faire en sorte que les arêtes de la carte soit autant que possible toutes de la même longueur, tout en éloignant au maximum les sommets les uns des autres. Bien sûr,

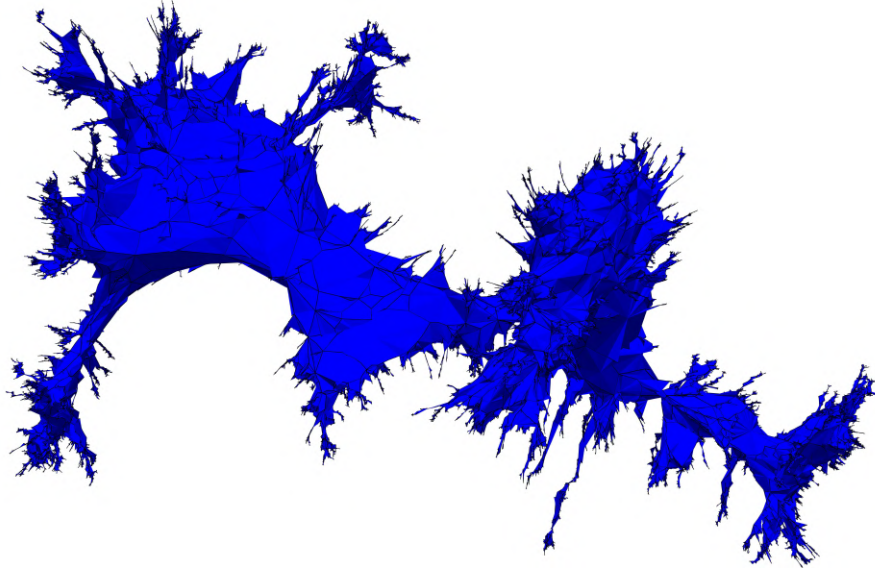


FIGURE 1.5. Carte aléatoire tirée uniformément parmi les cartes de la sphère à 50 000 arêtes. Nous renvoyons à la page nsup.org/~bettinel/simul.html pour d'autres simulations de cartes.

le résultat n'est pas parfait et on voit que certaines arêtes sont plus longues que d'autres, mais il n'y a pas d'arêtes exagérément longues par rapport aux autres.

L'intérêt de cette représentation est qu'elle permet de bien visualiser la distance de graphe de la carte : dans une carte $\mathbf{m}$, la *distance de graphe* $d_{\mathbf{m}}(a, b)$ entre deux sommets a et $b \in V(\mathbf{m})$ est définie comme le nombre minimal d'arêtes qu'il faut traverser pour aller du sommet a au sommet b . On peut voir une carte aléatoire comme un espace métrique aléatoire où les points de l'espace sont les sommets de la carte et la distance est la distance de graphe. Ainsi, la figure 1.5 donne un aperçu d'un tel espace métrique aléatoire.

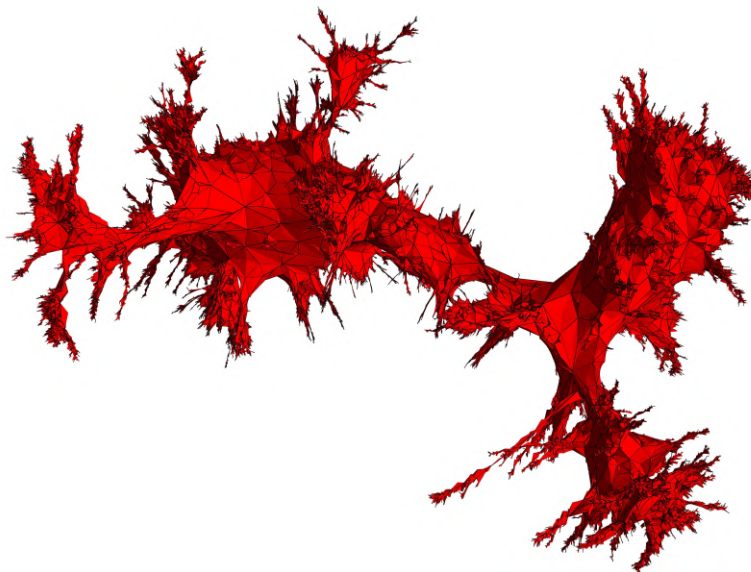


FIGURE 1.6. Carte aléatoire tirée uniformément parmi les quadrangulations de la sphère à 50 000 faces.

Une autre manière très naturelle de choisir une carte au hasard est de considérer une triangulation uniforme à un nombre de faces donné. Une *triangulation* est une carte dont toutes les faces sont de degré 3, c'est-à-dire des triangles. Pour des raisons techniques, il est plus simple de travailler avec des quadrangulations qu'avec des triangulations, c'est-à-dire des cartes dont toutes les faces ont degré 4. Bien que la façon de choisir nos cartes diffère entre les figures 1.5 et 1.6, on a l'impression, au moins de loin, de voir à peu près la même chose. Nous reviendrons sur cette remarque prochainement.

Une remarque qui semble évidente est que plus la carte possède de faces, plus elle sera grosse au sens de la distance de graphe. En revanche, il n'est pas évident du tout a priori de connaître l'ordre de grandeur de ces distances. Faisons un raisonnement naïf pour essayer de deviner cet ordre de grandeur. Si l'on imagine qu'une carte à n faces est à peu près un quadrillage standard $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$, alors la distance de graphe entre deux points doit être de l'ordre de $\sqrt{n}$. Il n'en est rien. Le premier résultat métrique sur les cartes aléatoires est dû à Philippe Chassaing et Gilles Schaeffer [CS04] et dit que les distances dans une carte aléatoire à n faces sont de l'ordre de $n^{1/4}$, ce qui est donc beaucoup plus petit que la prédiction du précédent raisonnement naïf!

Si les distances sont de l'ordre $n^{1/4}$ et que l'on veut voir quelque chose, il est alors naturel de renormaliser en divisant les distances par $n^{1/4}$. Cela nous amène au résultat suivant, pierre angulaire de la théorie, obtenu de deux façons distinctes par Jean-François Le Gall [LG13] et par Grégory Miermont [Mie13]. Si $\mathbf{m}$ est une carte et $a > 0$, on notera $a\mathbf{m} := (V(\mathbf{m}), a d_{\mathbf{m}})$ l'espace métrique associé à la carte, où chaque arête a longueur a . Notons que, avec ce point de vue, seule la structure de graphe est prise en compte.

Théorème 1.2 $\Leftarrow$ *limite d'échelle des quadrangulations planes uniformes* [LG13, Mie13] $\Leftarrow$

Soit $\mathbf{q}_n$ une carte uniformément distribuée parmi les quadrangulations de la sphère à n faces. Alors l'espace métrique aléatoire $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n$ admet une limite en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, que l'on nomme *sphère brownienne* (anciennement *carte brownienne*).

Nous avons choisi d'énoncer ce théorème avant de définir la topologie de Gromov–Hausdorff [Gro99] car le théorème est en soi relativement intuitif. Précisons maintenant ce qu'est la topologie de Gromov–Hausdorff. En deux mots, l'idée consiste à regarder la meilleure façon de plonger isométriquement deux espaces métriques compacts dans un même espace et de comparer au sens de Hausdorff les espaces plongés. Plus précisément, rappelons tout d'abord que la *distance de Hausdorff* entre deux compacts A et B d'un espace métrique $(\mathcal{X}, \delta)$ est donnée par

$$\delta_{\mathcal{H}}(A, B) := \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subseteq B^\varepsilon \text{ et } B \subseteq A^\varepsilon \},$$

où, pour toute partie $X \subseteq \mathcal{X}$, on désigne par $X^\varepsilon := \{x \in \mathcal{X} : \delta(x, X) \leq \varepsilon\}$ son ε -voisinage. Ensuite, pour deux espaces métriques compacts $(\mathcal{X}, \delta)$ et $(\mathcal{X}', \delta')$, on définit la *distance de Gromov–Hausdorff* entre eux par

$$d_{\text{GH}}((\mathcal{X}, \delta), (\mathcal{X}', \delta')) := \inf \{ \delta_{\mathcal{H}}(\varphi(\mathcal{X}), \varphi'(\mathcal{X}')) \},$$

où la borne inférieure est prise sur tous les plongements isométriques $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}''$ et $\varphi' : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}''$ de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ dans un espace métrique commun $(\mathcal{X}'', \delta'')$. Cela définit une pseudo-distance qui passe au quotient et devient une distance sur l'espace des classes d'isométrie d'espaces métriques compacts ([BBI01, Theorem 7.3.30]), et qui en fait un espace polonais³. Notons qu'il existe une caractérisation plus « pratique » de la distance de Gromov–Hausdorff en termes de distorsions de correspondances (voir la section 2.2.2.3 et [BBI01, Theorem 7.3.25]).

3. C'est une simple conséquence du théorème de compacité de Gromov [BBI01, Theorem 7.4.15].

1.3.2 Universalité

Le théorème 1.2 est un théorème de *limite d'échelle*. Le concept de limite d'échelle est bien connu en théorie des probabilités. Le principe général en est le suivant. On se donne une certaine classe d'objets combinatoires pour lesquels on dispose d'une notion de *volume* et d'une notion de *taille*. Lorsque le volume tend vers l'infini, on cherche à renormaliser la taille de manière à obtenir une limite intéressante. Plus précisément, on choisit un objet « au hasard » parmi les objets de volume n appartenant à cette classe. Il se peut que, une fois la taille renormalisée convenablement, cet objet tende en loi vers un objet limite continu lorsque $n \rightarrow \infty$. L'exemple classique est celui de la marche aléatoire standard : si l'on appelle volume le nombre de pas et taille la valeur de la marche, alors cet objet admet comme limite d'échelle le mouvement brownien. On choisit un chemin uniformément au hasard parmi les chemins constitués de n pas valant ± 1 et, après avoir renormalisé le volume par n et la taille par $\sqrt{n}$, ce chemin tend en loi vers un mouvement brownien défini sur $[0, 1]$, d'après le théorème de Donsker.

L'intérêt de cette approche est double. D'une part, l'objet que l'on obtient à la limite est un objet continu qui est souvent intéressant en soi, et cela indépendamment du fait qu'il apparaisse comme limite d'échelle du modèle discret. D'autre part, l'étude du modèle continu peut faire apparaître des propriétés asymptotiques du modèle discret difficiles à obtenir directement : de tels résultats ont par exemple été obtenus dans [Bet16a] pour les géodésiques dans les grandes cartes (voir la section 1.5.2). Par ailleurs, l'objet limite possède souvent une propriété d'*universalité* : on obtient la même limite d'échelle pour plusieurs classes différentes (mais présentant des similarités) d'objets. C'est le cas par exemple du mouvement brownien qui apparaît comme limite d'échelle de n'importe quelle marche aléatoire convenablement renormalisée, à condition que la loi de ses pas soit centrée et de variance finie. On peut aussi donner l'exemple de l'arbre continu brownien de David Aldous [Ald91, Ald93] qui est la limite d'échelle de nombreux modèles d'arbres aléatoires [DLG02].

Dans le cas qui nous intéresse ici, la sphère brownienne est aussi universelle. Le théorème 1.2 est encore valable si l'on considère d'autres classes de cartes plutôt que des quadrangulations uniformes, à condition de modifier la valeur de la constante $(8/9)^{-1/4}$, que l'on peut interpréter comme un terme de « variance » de la classe considérée. À une constante multiplicative près, la sphère brownienne apparaît ainsi comme limite d'échelle

- (a) des cartes planes dont toutes les faces ont le même degré fixé κ , lorsque $\kappa \in \{3, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ (Jean-François Le Gall [LG13]);
- (b) des cartes planes distribuées selon une loi de Boltzmann et conditionnées par leur nombre de sommets (Jean-François Le Gall [LG13]);
- (c) des quadrangulations planes sans sommets de degré 1 (Johel Beltran et Jean-François Le Gall [BLG13]);
- (d) des cartes planes conditionnées par leur nombre d'arêtes (avec Emmanuel Jacob et Grégory Miermont [BJM14]);
- (e) des triangulations planes et des quadrangulations planes sans boucles ni arêtes multiples (Louigi Addario-Berry et Marie Albenque [ABA17]);
- (f) des cartes planes biparties conditionnées par leur nombre d'arêtes (Céline Abraham [Abr16]);
- (g) des triangulations planes avec arêtes de longueurs aléatoires (Nicolas Curien et Jean-François Le Gall [CLG19]);
- (h) des cartes planes dont toutes les faces ont le même degré fixé κ , lorsque $\kappa \in \{5, 7, 9, \dots\}$, (Louigi Addario-Berry et Marie Albenque [ABA20]);
- (i) des cartes planes biparties dont les degrés des faces sont prescrits (Cyril Marzouk [Mar20]).

Il convient de développer brièvement cette liste. Précisons tout d'abord que, à l'exception du point (a) pour $\kappa \geq 4$ pair qui a été obtenu de façon directe, tous ces résultats utilisent l'approche maintenant

classique du travail pionnier de Jean-François Le Gall [LG13]. Cette approche nécessite comme prérequis la propriété dite d'*invariance par réenracinement* de la sphère brownienne ; à l'heure actuelle, on ne sait pas démontrer directement cette propriété à l'aide de la définition continue de la sphère brownienne ; on l'obtient à partir du discret (où elle est évidente) à l'aide de la convergence du théorème 1.2.

Les points (a) et (h) obtiennent le même résultat que le théorème 1.2 en remplaçant le mot *quadrangulations* par *cartes dont toutes les faces ont degré κ* , et en modifiant la valeur de la constante $(8/9)^{-1/4}$. Ensuite, le point (d) nous permet de revenir sur la comparaison visuelle entre les figures 1.5 et 1.6.

Théorème 1.3 $\Leftarrow$ *limite d'échelle des cartes planes uniformes* [BJM14] $\Rightarrow$

Soit $\mathbf{m}_n$ une carte uniformément distribuée parmi les cartes de la sphère à n arêtes. Alors l'espace métrique aléatoire $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{m}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers la sphère brownienne.

Le fait que la constante numérique $(8/9)^{-1/4}$ soit exactement la même que pour les quadrangulations est fortuit. Le résultat de (f) est le même que le théorème précédent, en se restreignant aux cartes dont toutes les faces sont de degrés pairs (et en modifiant la valeur de la constante). Les résultats de (c) et (e) introduisent des contraintes dites *de maille*, en interdisant soit les sommets de degré 1 pour (c), soit les boucles et arêtes multiples pour (e).

Le résultat de (g) propose un cadre un peu différent où les arêtes d'une triangulation n'ont plus toute la même longueur. La distance considérée n'est donc plus la distance de graphe mais une *modification locale* de celle-ci. Plus précisément, l'espace aléatoire considéré est une triangulation uniforme à nombre de sommets fixé, aux arêtes de laquelle on assigne des longueurs aléatoires i.i.d. Deux autres distances sur les triangulations uniformes sont également considérées, la première étant obtenue en prenant la distance de graphe du dual et la seconde en assignant des longueurs exponentielles aux arêtes du dual, ce qui peut être vu comme un modèle d'Eden sur une triangulation aléatoire.

Le cas de (b) demande quelques définitions supplémentaires. On considère une suite $\mathbf{w} = (w_i)_{i \geq 1}$ de nombres réels positifs, telle qu'il existe au moins un entier $i \geq 2$ pour lequel $w_i > 0$. On suppose de plus que la suite $\mathbf{w}$ est *critique régulière* au sens de [MM07] (voir la section 1.4.3). On considère la *loi de Boltzmann* $P_n^{\mathbf{w}}$ définie sur l'ensemble des cartes à n sommets dont toutes les faces sont de degré pair, par

$$P_n^{\mathbf{w}}(\mathbf{m}) \propto \prod_{f \in F(\mathbf{m})} w_{\deg(f)/2},$$

où la constante de proportionnalité dépend de $\mathbf{w}$ et n , et où l'on a noté $\deg(f)$ le degré d'une face f .

Théorème 1.4 $\Leftarrow$ *limite d'échelle de cartes distribuées selon une loi de Boltzmann* [LG13] $\Rightarrow$

Soit $\mathbf{m}_n$ une carte distribuée selon $P_n^{\mathbf{w}}$. Alors il existe une constante $a_{\mathbf{w}} > 0$ telle que l'espace métrique aléatoire $a_{\mathbf{w}} n^{-1/4} \mathbf{m}_n$ tende en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers la sphère brownienne.

Nous nous attardons également sur le cas (i), qui précise le résultat de (a) en autorisant une distribution de degrés pairs donnée. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère une suite $(d_n(k))_{k \geq 1}$ d'entiers positifs telle que $\sum_{k \geq 1} d_n(k) = n$ et $d_n(1) < n$. On définit la *variance* $\sigma_n > 0$ de cette suite par

$$\sigma_n^2 := \sum_{k \geq 1} k(k-1) d_n(k),$$

ainsi que le demi-degré maximal $\Delta_n := \max\{k \geq 1 : d_n(k) \neq 0\}$.

Théorème 1.5 $\hookrightarrow$ *limite d'échelle de cartes planes avec degrés de faces prescrits [Mar20]* $\hookleftarrow$

Soit $\mathbf{m}_n$ une carte uniformément distribuée parmi les cartes planes à n faces, ayant exactement $d_n(k)$ faces de degré $2k$, pour chaque $k \geq 1$. Si $\sigma_n^{-1} \Delta_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors l'espace métrique aléatoire $(2\sigma_n/3)^{-1/2} \mathbf{m}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers la sphère brownienne.

La condition $\sigma_n^{-1} \Delta_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ correspond au fait qu'il n'y a pas de face qui reste macroscopique à la limite. Nous reviendrons sur cette remarque au cours de la section 1.4.2 où nous imposerons l'existence d'un nombre fini de grandes faces.

1.3.3 Dimension de Hausdorff et topologie

Terminons cette section en mentionnant deux propriétés qui éclairent les simulations des figures 1.5 et 1.6. La première est due à Jean-François Le Gall [LG07].

Théorème 1.6 $\hookrightarrow$ *dimension de Hausdorff de la sphère brownienne [LG07]* $\hookleftarrow$

Presque sûrement, la dimension de Hausdorff de la sphère brownienne est 4.

La seconde a été démontrée dans un premier temps par Jean-François Le Gall et Frédéric Paulin [LGP08], puis remontrée à l'aide d'autres méthodes par Grégory Miermont [Mie08].

Théorème 1.7 $\hookrightarrow$ *topologie de la sphère brownienne [LGP08, Mie08]* $\hookleftarrow$

Presque sûrement, la sphère brownienne est homéomorphe à la sphère de $\mathbb{R}^3$.

Il est amusant de mettre côte à côte ces deux théorèmes qui, à première vue, peuvent sembler paradoxaux, dans la mesure où la sphère est de dimension 2. Cela dit, rien n'est ici contradictoire et on peut faire une fois de plus le parallèle avec le mouvement brownien. Une trajectoire de mouvement brownien dans le plan est la trajectoire d'un processus continu donc est homéomorphe à une droite mais il est connu que la dimension de cette trajectoire est presque sûrement 2. Dans le cas de la sphère brownienne, on peut imaginer une sphère pleine de piquants, qui possède une structure fractale et prend finalement 4 dimensions.

1.4 Surfaces browniennes

On s'intéresse maintenant à une « grande carte aléatoire » d'une surface topologiquement plus complexe que la sphère. Une subtilité technique nous contraint à nous retreindre aux cartes biparties. Il n'est pas très difficile de voir qu'une quadrangulation de la sphère est toujours bipartie et c'est pour cette raison que cette subtilité n'est pas apparue plus tôt. En revanche, cela n'est plus du tout vrai en genre supérieur à 1. En fait, on peut montrer qu'en genre g , la proportion de quadrangulations à n faces qui sont biparties tend vers $1/4^g$ lorsque n tend vers l'infini [Ben91, Equation (2.2)].

1.4.1 Surfaces orientables sans bord

On considère ici des cartes d'une surface orientable sans bord. On rappelle que, d'après le théorème de classification des surfaces⁴, ces surfaces sont celles de la figure 1.1 et sont caractérisées par leur genre, noté g . Le résultat suivant, issu de ma thèse, énonce l'existence de limites d'échelle.

4. Voir par exemple [MT01, Chapter 3].

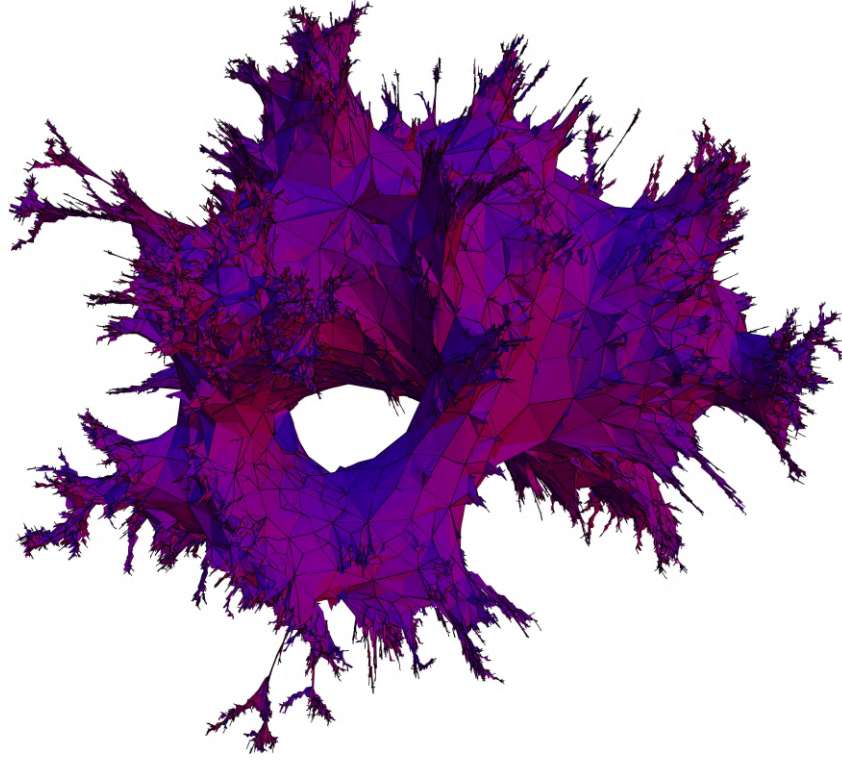


FIGURE 1.7. Carte aléatoire tirée uniformément parmi les quadrangulations biparties du tore à 50 000 faces.

Théorème 1.8 existence de limites d'échelle [Bet10]

Soit $g \geq 1$ un entier fixé et soit $\mathbf{q}_n$ uniformément distribuée parmi les quadrangulations biparties de genre g à n faces. Alors, de toute suite strictement croissante d'entiers, on peut extraire une sous-suite $(n_k)_{k \geq 0}$ telle que $(8n_k/9)^{-1/4} \mathbf{q}_{n_k}$ admette une limite en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff.

Contrairement au théorème 1.2 qui énonce la convergence d'une suite d'espaces métriques, le théorème 1.8 montre seulement l'existence de valeurs d'adhérence de la suite $((8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n)_n$. Dans le travail en cours de rédaction avec Grégory Miermont [BM22], nous complétons ce théorème en montrant la convergence complète de la suite.

Théorème 1.9 unicité de la limite d'échelle [BM22]

Soit $g \geq 1$ un entier fixé et soit $\mathbf{q}_n$ uniformément distribuée parmi les quadrangulations biparties de genre g à n faces. Alors l'espace métrique $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n$ admet une limite en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, que l'on appelle **surface brownienne de genre g** .

Nous obtenons ce résultat en « découper » les cartes le long de géodésiques de sorte à obtenir des morceaux de topologie plane. La convergence de ces morceaux peut ensuite être contrôlée par des résultats d'absolue continuité en les voyant comme des versions conditionnées de morceaux apparaissant dans les surfaces browniennes non compactes appelées **plan brownien** et **demi-plan brownien**. Nous développerons cela au cours de la section 2.2.2.

Dans ce cas, nous avons également le pendant des théorèmes 1.6 et 1.7, établi dans ma thèse.

Théorème 1.10 $\Leftarrow$ *topologie et dimension de Hausdorff* [Bet12] $\Leftarrow$

Presque sûrement, la surface brownienne de genre g est homéomorphe à la surface de genre g et est de dimension de Hausdorff 4.

Notons que, partant d'une surface de genre g , on s'attend à ce que la limite soit de genre au plus g car on ne voit pas vraiment comment le genre pourrait augmenter, comment on pourrait « créer des anses », mais il n'est pas clair du tout que le genre ne diminue pas à la limite. On pourrait imaginer que certaines anses soient trop petites et disparaissent à la limite : le théorème 1.10 montre que ce n'est pas le cas ; en quelque sorte, toutes les anses gardent une taille macroscopique.

1.4.2 Surfaces orientables à bord

On peut généraliser un peu plus et considérer des surfaces ayant un bord. Cela pose de nouvelles questions car le bord va jouer un rôle particulier. On entend par *surface à bord* un espace compact connexe S non vide dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Le bord de S , noté ∂S est la variété de dimension 1 constituée des points ayant un voisinage homéomorphe à un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Notons, en particulier, qu'une surface sans bord est une surface à bord dont le bord est vide. . . On se restreint ici aux surfaces à bord orientables ; d'après le théorème de classification des surfaces⁴, elles sont caractérisées à homéomorphisme près par deux entiers positifs : le genre g et le nombre p de composantes connexes du bord. On notera $\Sigma_{g,p}^\partial$ l'unique (à homéomorphisme près) surface à bord orientable de genre g dont le bord est constitué de p composantes connexes. Une manière simple d'obtenir cette surface consiste à retirer de la somme connexe de g tores p disques ouverts disjoints dont les frontières forment des cercles deux à deux disjoints. Par exemple, $\Sigma_{0,0}^\partial$ est la sphère, $\Sigma_{1,0}^\partial$ est le tore, $\Sigma_{0,1}^\partial$ est le disque, $\Sigma_{0,2}^\partial$ est le cylindre, etc.

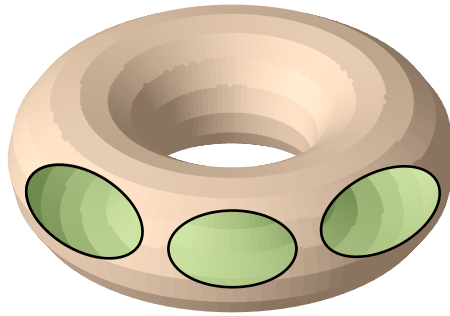


FIGURE 1.8. La surface à bord de genre 1 à 3 trous, notée $\Sigma_{1,3}^\partial$.

Une *carte à bord* est une carte dont certaines faces sont distinguées. Ces faces distinguées seront appelées *faces externes*, ou plus simplement *trous*, et seront notées $h_1, \dots, h_p$. Les autres faces seront appelées *faces internes*. De façon qui peut sembler un peu paradoxale, nous avons choisi de définir les cartes à bord sur des surfaces sans bord. Il est possible de retirer de chaque trou d'une carte à bord un disque ouvert dont la frontière est un cercle afin d'obtenir une surface à bord. Attention au fait qu'en général, cela ne revient pas à simplement retirer les faces externes car leurs frontières ne sont a priori pas des cercles (comme c'est le cas de h_1 par exemple sur la figure 1.9) et ne sont pas nécessairement disjointes. On aurait également pu définir les cartes à bord comme des classes d'équivalence de graphes plongés sur une surface à bord mais il s'avère plus pratique de définir les choses ainsi.

Définition 1.11 $\Leftarrow$ *quadrangulation à bord* $\Rightarrow$

On appelle *quadrangulation à bord* une carte à bord dont toutes les faces internes sont de degré 4.

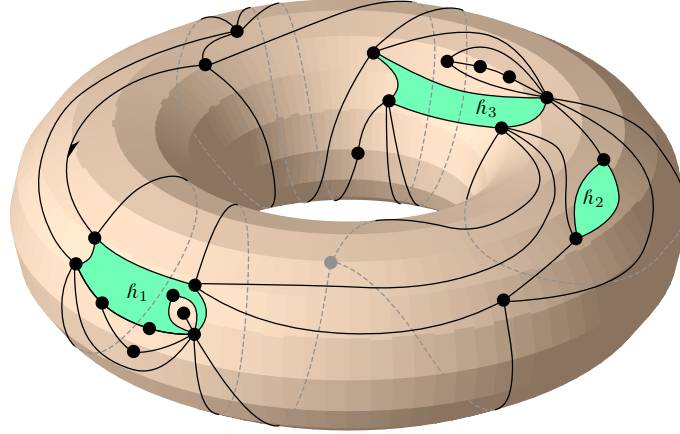


FIGURE 1.9. Une quadrangulation à bord de $\mathbf{Q}_{19,(4,1,2)}^{[1]}$. La racine est symbolisée par la demi-pointe de flèche.

Ces cartes apparaissent naturellement dans les études bijectives que nous décrirons plus tard. On se place en genre g fixé. Pour⁵ $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{l} = (l^1, \dots, l^p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ (avec la convention $(\mathbb{N}^*)^0 := \{\emptyset\}$), on note $\mathbf{Q}_{n,\mathbf{l}}^{[g]}$ l'ensemble des quadrangulations *biparties* à bord de genre g , ayant p faces externes et n faces internes, telles que h_i soit de degré $2l^i$, pour $1 \leq i \leq p$.

Théorème 1.12 $\Leftarrow$ *existence de limites d'échelle* [\[Bet16a\]](#) $\Rightarrow$

Soit $p \geq 0$ un entier, $L^1, \dots, L^p > 0$ des réels strictement positifs, et $\mathbf{l}_n = (l_n^1, \dots, l_n^p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ une suite de p -uplets telle que $l_n^i / \sqrt{2n} \rightarrow L^i$, pour $1 \leq i \leq p$. Soit $\mathbf{q}_n$ uniformément distribuée parmi $\mathbf{Q}_{n,\mathbf{l}_n}^{[g]}$. Alors, de toute suite strictement croissante d'entiers, on peut extraire une sous-suite $(n_k)_{k \geq 0}$ telle que $(8n_k/9)^{-1/4} \mathbf{q}_{n_k}$ admette une limite en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff.

Ici non plus, ce théorème ne donne pas la convergence complète de la suite et, ici aussi, le travail en cours de rédaction avec Grégory Miermont [\[BM22\]](#) comble cette lacune.

Théorème 1.13 $\Leftarrow$ *unicité de la limite d'échelle* [\[BM22\]](#) $\Rightarrow$

Soit $p \geq 0$, $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^p)$ un p -uplet de réels strictement positifs, et $\mathbf{l}_n = (l_n^1, \dots, l_n^p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ une suite de p -uplets telle que $l_n^i / \sqrt{2n} \rightarrow L^i$, pour $1 \leq i \leq p$. Soit $\mathbf{q}_n$ uniformément distribuée parmi $\mathbf{Q}_{n,\mathbf{l}_n}^{[g]}$. Alors l'espace métrique $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n$ admet une limite en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, que l'on appelle *surface brownienne de genre g et périmètre $\mathbf{L}$* .

La dimension et la topologie sont également connues.

5. Tout au long de ce document, on note $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ et $\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \dots\}$.

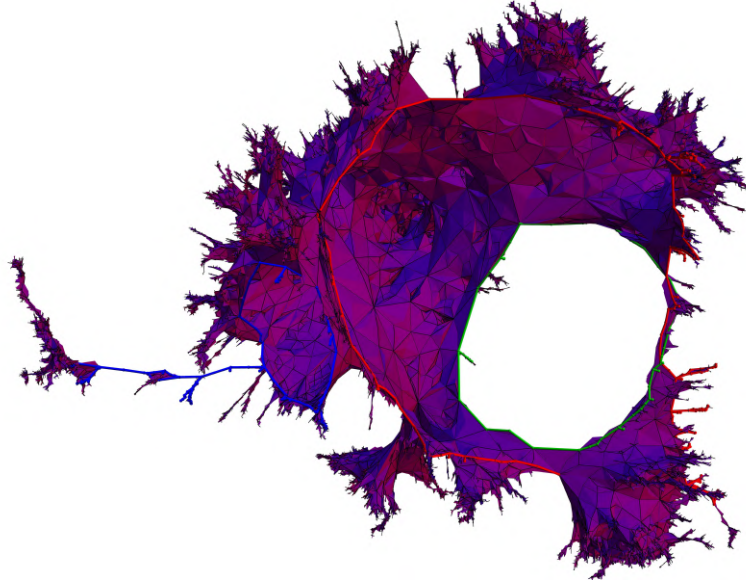


FIGURE 1.10. Carte aléatoire tirée uniformément parmi les quadrangulations biparties de la sphère à 30 000 faces et trois trous de longueurs 400 (rouge), 200 (vert) et 100 (bleu).

Théorème 1.14 $\Leftarrow$ *topologie et dimension de Hausdorff* [Bet16a] $\Rightarrow$

Presque sûrement, la surface brownienne de genre g et périmètre L est homéomorphe à la surface à bord $\Sigma_{g,p}^\partial$ de genre g ayant p composantes connexes sur son bord, où p est la dimension du vecteur de bord L .

De plus, presque sûrement, elle est de dimension de Hausdorff 4, et chacune des p composantes connexes de son bord est de dimension de Hausdorff 2.

Notons ici deux faits surprenants. D’une part, le nombre de trous reste le même à la limite, ce qui veut dire que les trous sont macroscopiquement séparés, ils ne coalescent pas. Cela signifie que la masse est relativement bien répartie un peu partout sur la carte. D’autre part, les bord des trous sont des cercles à la limite, ce qui n’est a priori pas clair du tout car, dans le discret, on n’a pas imposé que le bord des trous des cartes soient des courbes simples, c’est-à-dire ne passant qu’une fois par chaque sommet (le bord de h_1 par exemple sur la figure 1.9 n’est pas simple).

1.4.3 Universalité du disque brownien

Dans le cas particulier du disque (genre 0 avec 1 trou), nous avons prouvé le théorème 1.13 avec Grégory Miermont dans un travail séparé [BM17], qui sert par ailleurs pour le cas général, et nous obtenons également des résultats d’universalité du disque brownien en montrant la convergence vers ce dernier de divers modèles de cartes de Boltzmann conditionnées par leur nombre de faces, d’arêtes ou de sommets. En particulier, ce cadre comprend notamment les 2κ -angulations pour $\kappa \geq 2$ et les cartes biparties uniformes à nombre d’arêtes donné.

Définition 1.15 $\Leftarrow$ *carte du disque* $\Rightarrow$

Une **carte du disque** est une carte à bord de genre 0 avec une unique face externe. Le degré de la face externe est appelé **périmètre** de la carte.

2κ -angulations et cartes biparties uniformes. Dans le cas du disque, le théorème 1.13 s'énonce de la façon suivante.

Théorème 1.16 $\Leftarrow$ *limite d'échelle de quadrangulations du disque* [BM17] $\Rightarrow$

Soit $L > 0$ un réel strictement positif, et une suite d'entiers $l_n \in \mathbb{N}^*$, telle que $l_n/\sqrt{2n} \rightarrow L$. Soit $\mathbf{q}_n$ uniformément distribuée parmi l'ensemble $\mathbf{Q}_{n,l_n}^{[0]}$ des quadrangulations du disque à n faces internes et périmètre $2l_n$. Alors l'espace métrique $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n$ admet une limite en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, que l'on appelle **disque brownien de périmètre L** , et que l'on note BD_L .

On peut le généraliser aux 2κ -angulations, pour $\kappa \geq 2$.

Théorème 1.17 $\Leftarrow$ *limite d'échelle de 2κ -angulations du disque* [BM17] $\Rightarrow$

Soit $L > 0$ un réel strictement positif, et une suite d'entiers $l_n \in \mathbb{N}^*$, telle que $l_n/\sqrt{\kappa(\kappa-1)n} \rightarrow L$. Soit $\mathbf{m}_n$ uniformément distribuée parmi l'ensemble des 2κ -angulations du disque à n faces internes et périmètre $2l_n$. Alors l'espace métrique $(4\kappa(\kappa-1)n/9)^{-1/4} \mathbf{m}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers BD_L .

On a par ailleurs l'équivalent du résultat de Céline Abraham [Abr16] (point (f) de la section 1.3.2).

Théorème 1.18 $\Leftarrow$ *limite d'échelle de cartes biparties du disque* [BM17] $\Rightarrow$

Soit $L > 0$ un réel strictement positif, et une suite d'entiers $l_n \in \mathbb{N}^*$, telle que $l_n \sim 3L\sqrt{n/2}$. Soit $\mathbf{m}_n$ une carte uniformément distribuée parmi les cartes biparties du disque à n arêtes et périmètre $2l_n$. Alors l'espace métrique $(2n)^{-1/4} \mathbf{m}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers BD_L .

Cartes de Boltzmann. Les théorèmes 1.17 (pour $\kappa \geq 3$) et 1.18 sont des applications du cadre suivant (qui utilise le théorème 1.16). On considère une suite $\mathbf{w} = (w_i)_{i \geq 1}$ de nombres réels positifs (appelés *poids*), telle qu'il existe au moins un entier $i \geq 2$ pour lequel $w_i > 0$. Sur l'ensemble des cartes biparties du disque, on définit la *mesure de Boltzmann* (associée à la suite $\mathbf{w}$) par

$$W(\mathbf{m}) := \prod_{f \in \mathbf{F}(\mathbf{m}) \setminus \{h\}} w_{\deg(f)/2},$$

où l'on note h l'unique face externe de $\mathbf{m}$ et $\deg(f)$ le degré d'une face f . Soient $\mathbf{B}_{l,n}^V, \mathbf{B}_{l,n}^E, \mathbf{B}_{l,n}^F$ les ensembles de cartes biparties du disque de périmètre $2l$ ayant respectivement $n+1$ sommets⁶, n arêtes, et n faces internes. Pour⁷ $S \in \{V, E, F\}$, dès lors que $0 < W(\mathbf{B}_{l,n}^S) < \infty$, on peut définir la *loi de Boltzmann*

$$\mathbb{W}_{l,n}^S := W(\cdot \mid \mathbf{B}_{l,n}^S).$$

Nous serons amenés à considérer des cartes pointées, celles-ci apparaissant plus naturellement dans les approches bijectives sur lesquelles ces travaux sont basés. Une *carte pointée* est un couple $(\mathbf{m}, v^\bullet)$ où $\mathbf{m}$ est une carte et $v^\bullet \in V(\mathbf{m})$ est l'un de ses sommets. Pour $S \in \{V, E, F\}$, on introduit l'ensemble $\mathbf{B}_{l,n}^{S,\bullet}$ des cartes pointées $(\mathbf{m}, v^\bullet)$ telles que $\mathbf{m} \in \mathbf{B}_{l,n}^S$. On définit la mesure

$$W^\bullet(\{(\mathbf{m}, v^\bullet)\}) := W(\mathbf{m})$$

6. Le choix de $n+1$ plutôt que n sommets est technique et rendra les énoncés plus simples.

7. On a choisi la lettre S pour le mot *size*.

sur l'ensemble des cartes pointées biparties du disque, ainsi que ses versions conditionnées

$$\mathbb{W}_{l,n}^{\bullet,S} := W^\bullet(\cdot \mid \mathbf{B}_{l,n}^{\bullet,S})$$

dès lors que $0 < W^\bullet(\mathbf{B}_{l,n}^{\bullet,S}) < \infty$.

Nous introduisons maintenant une terminologie tirée de [MM07], auquel nous référons pour plus de détails. Pour $x \geq 0$, soit

$$f_{\mathbf{w}}(x) := \sum_{k \geq 0} x^k \binom{2k+1}{k} w_{k+1} \in [0, \infty].$$

Définition 1.19 $\Leftarrow$ suite de poids critique régulière $\Rightarrow$

On dit que la suite de poids $\mathbf{w}$ est **admissible** si l'équation

$$f_{\mathbf{w}}(z) = 1 - \frac{1}{z} \quad (1.1)$$

admet une solution $z > 1$. On dit que la suite de poids $\mathbf{w}$ est **critique régulière** si elle est admissible et si, de plus, la solution de (1.1) vérifie

$$z^2 f'_{\mathbf{w}}(z) = 1$$

et il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $f_{\mathbf{w}}(z + \varepsilon) < \infty$.

On peut vérifier que, pour une suite admissible, on a toujours $W(\mathbf{B}_{l,n}^S) < \infty$ et $W^\bullet(\mathbf{B}_{l,n}^{\bullet,S}) < \infty$, quels que soient n , k et S . Notons qu'être critique régulière signifie que les graphes de $f_{\mathbf{w}}$ et de $x \mapsto 1 - 1/x$ sont tangents au point d'abscisse solution de (1.1); par convexité de $f_{\mathbf{w}}$, cela implique que cette solution est unique : on la note $Z_{\mathbf{w}}$ (voir [MM07, Figure 1] pour une illustration). On suppose dorénavant que la suite de poids $\mathbf{w}$ est **critique régulière** et on définit $\rho_{\mathbf{w}} := 2 + Z_{\mathbf{w}}^3 f''_{\mathbf{w}}(Z_{\mathbf{w}})$, ainsi que

$$\sigma_E := \sqrt{\frac{\rho_{\mathbf{w}}}{Z_{\mathbf{w}}}}, \quad \sigma_V := \sqrt{\rho_{\mathbf{w}}}, \quad \sigma_F := \sqrt{\frac{\rho_{\mathbf{w}}}{Z_{\mathbf{w}} - 1}}.$$

Théorème 1.20 $\Leftarrow$ limite d'échelle de cartes biparties de Boltzmann du disque [BM17] $\Rightarrow$

Soit $\mathbf{w}$ une suite de poids critique régulière, S l'un des symboles V , E , ou F , et $L > 0$. Soit également une suite $(l_k, n_k)_{k \geq 0}$ de couples d'entiers positifs telle que $W(\mathbf{B}_{l_k, n_k}^S) > 0$ pour tout $k \geq 0$, et $l_k, n_k \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$ dans le régime $l_k \sim L \sigma_S \sqrt{n_k}$.

Pour $k \geq 0$, soit $\mathbf{m}_k$ une carte aléatoire distribuée selon $\mathbb{W}_{l_k, n_k}^S$. Alors $(4\sigma_S^2 n_k / 9)^{-1/4} \mathbf{m}_k$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers BD_L .

De même, si $\mathbf{m}_k^\bullet$ désigne la carte aléatoire obtenue en oubliant le sommet distingué d'une carte pointée distribuée selon $\mathbb{W}_{l_k, n_k}^{\bullet,S}$, alors l'espace métrique $(4\sigma_S^2 n_k / 9)^{-1/4} \mathbf{m}_k^\bullet$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers BD_L .

Heuristiquement, ces constantes de renormalisation s'observent de la façon suivante. Dans une grande carte aléatoire distribuée selon une loi de Boltzmann, on peut vérifier que les nombres $|V|$ et $|F|$ de sommets et de faces sont de l'ordre de $|E|/Z_{\mathbf{w}}$ et $|E|(1 - 1/Z_{\mathbf{w}})$ respectivement, où $|E|$ désigne le nombre d'arêtes. Ainsi, conditionner à avoir n arêtes est asymptotiquement équivalent à conditionner à avoir (approximativement) $n/Z_{\mathbf{w}}$ sommets, ou $n(1 - 1/Z_{\mathbf{w}})$ faces; cela explique les relations sur les facteurs d'échelle : $\sigma_E^2 n = \sigma_V^2 n / Z_{\mathbf{w}} = \sigma_F^2 n (1 - 1/Z_{\mathbf{w}})$.

Disque brownien libre. Les modèles présentés dans le paragraphe précédent consistent à prendre une carte aléatoire ayant une taille (nombre de sommets, d'arêtes, ou de faces) et un périmètre fixés et

à faire tendre ces deux quantités vers l'infini dans un régime approprié. On s'intéresse maintenant à une version « libre » où seul le périmètre est fixé et tend vers l'infini, alors que la taille est laissée libre.

On fixe une suite de poids w critique régulière et on considère l'ensemble $\mathbf{B}_l$ des cartes biparties du disque de périmètre $2l$, ainsi que l'ensemble $\mathbf{B}_l^\bullet$ des cartes pointées correspondantes. On définit (on peut vérifier que ces conditionnements sont licites)

$$\mathbb{W}_l := W(\cdot \mid \mathbf{B}_l) \quad \text{et} \quad \mathbb{W}_l^\bullet := W^\bullet(\cdot \mid \mathbf{B}_l^\bullet).$$

Pour $L \geq 0$ et $A > 0$, on note $\text{BD}_{L,A}$ le *disque brownien d'aire A et périmètre L* dont la loi est celle de $A^{1/4} \text{BD}_{A^{-1/2}L}$. D'après le théorème 1.16, cet espace est la limite de $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n^A$, où $\mathbf{q}_n^A$ est une carte aléatoire uniformément distribuée parmi l'ensemble $\mathbf{Q}_{[An], [L\sqrt{2n}]}^{[0]}$ des quadrangulations du disque à $[An]$ faces internes et périmètre $2[L\sqrt{2n}]$.

Soit $\mathcal{A}^\bullet$ une variable aléatoire stable d'indice $1/2$, dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\bullet \in dA) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A^3}} \exp\left(-\frac{1}{2A}\right) dA \mathbf{1}_{\{A>0\}}.$$

Comme $\mathbb{E}[1/\mathcal{A}^\bullet] = 1$, la formule

$$\frac{\mathbb{P}(\mathcal{A}^\bullet \in dA)}{A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi A^5}} \exp\left(-\frac{1}{2A}\right) dA \mathbf{1}_{\{A>0\}}$$

définit également une distribution de probabilité : soit $\mathcal{A}$ une variable aléatoire distribuée selon cette loi. On définit le *disque brownien libre* (de périmètre 1) comme l'espace FBD_1 dont la loi est celle de $\text{BD}_{1,\mathcal{A}}$, c'est-à-dire que, conditionnellement à $\mathcal{A} = A$, il a la même distribution que $\text{BD}_{1,A}$. De même, le *disque brownien libre pointé* (de périmètre 1) $\text{FBD}_1^\bullet$ est défini comme ayant la loi de $\text{BD}_{1,\mathcal{A}^\bullet}$.

Théorème 1.21 *limite d'échelle des cartes biparties de Boltzmann libres* [BM17]

Soit w une suite de poids critique régulière. Pour $l \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbf{b}_l$ distribuée selon $\mathbb{W}_l$. Alors l'espace métrique $(2l/3)^{-1/2} \mathbf{b}_l$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers FBD_1 .

De même, si $\mathbf{b}_l^\bullet$ désigne la carte aléatoire obtenue en oubliant le sommet distingué d'une carte pointée distribuée selon $\mathbb{W}_l^\bullet$, alors l'espace métrique $(2l/3)^{-1/2} \mathbf{b}_l^\bullet$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers $\text{FBD}_1^\bullet$.

Ce qui est particulièrement remarquable dans ce théorème est le fait que la renormalisation ne dépend pas de la suite de poids w .

Ce dernier résultat a été étendu par Marie Albenque, Nina Holden, et Xin Sun [AHS20] au cas des *triangulations à bord simple*, qui sont des cartes du disque dont toutes les faces internes sont de degré 3 et dont l'unique face externe est simple, ce qui signifie les sommets qui lui sont incidents ne sont visités qu'une fois lors de son contour. Dans ce contexte, on note

- ♦ $\mathbf{T}_l^{\text{I}}$ l'ensemble des triangulations à bord simple de périmètre l ;
- ♦ $\mathbf{T}_l^{\text{II}}$ l'ensemble des triangulations à bord simple de périmètre l n'ayant pas de boucle;
- ♦ $\mathbf{T}_l^{\text{III}}$ l'ensemble des triangulations à bord simple de périmètre l n'ayant ni boucle ni arête multiple.

Pour $i \in \{\text{I}, \text{II}, \text{III}\}$, on parle généralement de *triangulations de type i* pour désigner les éléments de $\mathbf{T}_l^i$. Attention toutefois au fait que le *type* d'une triangulation n'est pas vraiment défini car $\mathbf{T}_l^{\text{III}} \subseteq \mathbf{T}_l^{\text{II}} \subseteq \mathbf{T}_l^{\text{I}}$. On pose

$$w_{\text{I}} := \frac{1}{12\sqrt{3}}, \quad w_{\text{II}} := \frac{2}{27}, \quad w_{\text{III}} := \frac{27}{256},$$

et on définit, pour $i \in \{I, II, III\}$, la loi de Boltzmann critique P_l^i sur l'ensemble T_l^i des triangulations de type i à bord simple de périmètre l par

$$P_l^i(\mathbf{t}) \propto (w_i)^{|\mathbf{V}(\mathbf{t})|}.$$

Théorème 1.22 $\leftarrow$ limite d'échelle des triangulations de Boltzmann libres [AHS20] $\rightarrow$

Soit $i \in \{I, II, III\}$ et, pour $l \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbf{t}_l^i$ distribuée selon P_l^i . Alors l'espace métrique $(2l/3)^{-1/2} \mathbf{t}_l^i$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers FBD_1 .

Bord dégénéré. Les résultats précédents montrent que la taille naturelle du bord d'une carte à n faces est de l'ordre de $\sqrt{n}$ mais on peut également se demander ce qu'il se passe si l'on prend un bord trop petit ou trop grand par rapport à ce régime. Dans le cas du disque, nous avons obtenu, au cours de ma thèse, les résultats suivants. À la limite, le bord d'une quadrangulation à petit bord « disparaît » et l'on obtient la même limite que dans le cas sans bord.

Théorème 1.23 $\leftarrow$ limite d'échelle de quadrangulations à petit périmètre [Bet15] $\rightarrow$

Supposons que $l_n/\sqrt{2n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et soit $\mathbf{q}_n$ uniformément distribuée dans $\mathbf{Q}_{n,l_n}^{[0]}$. Alors l'espace métrique $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers la sphère brownienne.

L'idée très générale qui se cache derrière ce théorème est qu'une quadrangulation avec un « petit » bord n'est pas très loin d'une quadrangulation sans bord. Dans le cas général, nous pensons qu'il est possible d'étendre le résultat du théorème 1.13 au cas où certains L^i sont nuls. Plus précisément, nous conjecturons le résultat suivant.

Conjecture 1.24 $\leftarrow$ bords évanescents $\rightarrow$

Soit $0 \leq p' \leq p$ des entiers, $L^1, \dots, L^{p'} > 0$ des réels strictement positifs et $L^{p'+1} = 0, \dots, L^p = 0$. Soit de plus une suite de p -uplets $\mathbf{l}_n = (l_n^1, \dots, l_n^p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ telle que $l_n^i/\sqrt{2n} \rightarrow L^i$, pour $1 \leq i \leq p$ et $\mathbf{q}_n$ uniformément distribuée parmi $\mathbf{Q}_{n,l_n}^{[g]}$. Alors l'espace métrique $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers la surface brownienne de genre g et périmètre $(L^1, \dots, L^{p'})$.

Passons maintenant au cas où le bord est trop grand par rapport à la taille des quadrangulations. Ici, le bon facteur d'échelle n'est plus $n^{1/4}$, mais la racine carrée de la longueur du bord. Heuristiquement, le bord domine par rapport au reste de la carte et il faut donc renormaliser par un facteur de bord. À la limite, les faces sont trop renormalisées et seul le bord reste visible. On observe un espace métrique connu des probabilistes : l'arbre continu brownien de David Aldous [Ald91, Ald93] qui est, entre autres, la limite d'échelle des arbres aléatoires.

Théorème 1.25 $\leftarrow$ limite d'échelle de quadrangulations à grand périmètre [Bet15] $\rightarrow$

Supposons que $l_n/\sqrt{2n} \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et soit $\mathbf{q}_n$ uniformément distribuée parmi $\mathbf{Q}_{n,l_n}^{[0]}$. Alors l'espace métrique $(2l_n)^{-1/2} \mathbf{q}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers l'arbre continu brownien.

Cela signifie qu'une grande carte à grand bord a essentiellement une structure d'arbre avec un peu de masse dans les branches, mais pas suffisamment pour persister à la limite. Ce résultat a depuis été

généralisé par Cyril Marzouk [Mar20] en autorisant une distribution de degrés pairs donnée, comme dans la section 1.3.2. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère maintenant un entier $l_n \in \mathbb{N}^*$ et toujours une suite $(d_n(k))_{k \geq 1}$ d'entiers positifs telle que $\sum_{k \geq 1} d_n(k) = n$ et $d_n(1) < n$, et on définit encore la variance $\sigma_n > 0$ de cette suite par $\sigma_n^2 := \sum_{k \geq 1} k(k-1) d_n(k)$.

Théorème 1.26 $\Leftarrow$ limite d'échelle de cartes à degrés prescrits et grand périmètre [Mar20] $\Rightarrow$

Soit $\mathbf{m}_n$ une carte uniformément distribuée parmi les cartes à bord à n faces internes, ayant exactement $d_n(k)$ faces de degré $2k$, pour chaque $k \geq 1$, et une unique face externe, de degré $2l_n$. Si $\sigma_n^{-1} l_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors l'espace métrique $(2l_n)^{-1/2} \mathbf{m}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov-Hausdorff, vers l'arbre continu brownien.

1.4.4 Limites d'échelle par restriction

En général, les résultats de limite d'échelle de cartes utilisent un codage qu'on peut exploiter, et c'est ce que nous développerons dans la section 2.1. Dans l'article [BCFS21] avec Nicolas Curien, Luis Fredes, et Avelio Sepúlveda, nous obtenons un résultat d'universalité sans utiliser ce type d'approche.

Une façon simple d'obtenir des résultats de limite d'échelle de cartes consiste à transférer des résultats connus vers des classes de cartes qui sont « contenues dans » la classe connue, par exemple en supprimant des petits morceaux de la carte initiale. À titre d'exemple, à partir du théorème 1.16, qui énonce que, si $\mathbf{q}_n$ est uniformément distribuée dans l'ensemble des quadrangulations du disque à n faces et périmètre $2l_n$, où $l_n/\sqrt{2n} \rightarrow L > 0$, alors $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n$ tend vers le disque brownien BD_L de périmètre L , il n'est pas très compliqué de montrer que

$$\left(\left(\frac{8n}{9} \right)^{-1/4} \mathbf{q}_n, \left(\frac{8n}{9} \right)^{-1/4} \text{Core}(\mathbf{q}_n) \right) \rightarrow (\text{BD}_L, \text{BD}_L),$$

où le cœur $\text{Core}(\mathbf{q})$ d'une quadrangulation $\mathbf{q}$ du disque est obtenu essentiellement à partir de $\mathbf{q}$ en ne conservant que la plus grosse composante à bord simple⁸; voir la figure 1.11.

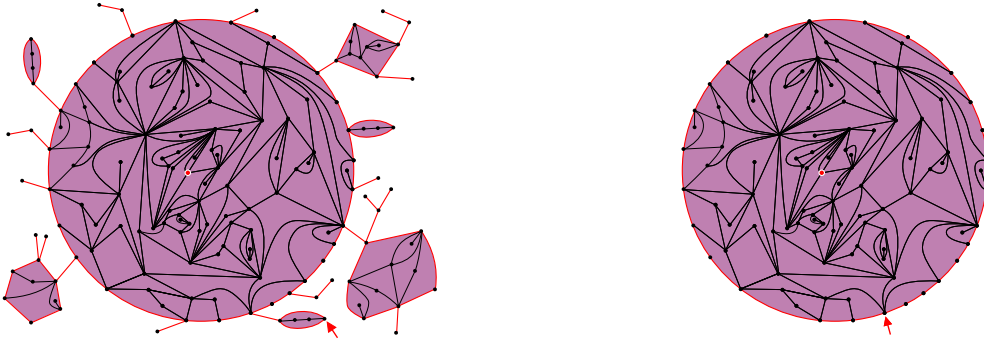


FIGURE 1.11. Le cœur de la quadrangulation du disque à gauche est obtenu, à droite, en « élaguant » le bord de la plus grosse composante. Le sommet distingué en rouge sera utile plus tard. La racine est ici un coin de la face externe, notée à l'aide d'une flèche; dans ce modèle, il est usuel d'enraciner les cartes sur le bord. Le cœur est enraciné de façon canonique à partir de la racine originale.

Avec ce type de méthode, on obtient généralement la limite d'échelle pour une famille de cartes aléatoires $\mathbf{m}_{N(n)}$ pour laquelle la taille $N(n)$ (ici le nombre de faces) est aléatoire et satisfait une loi faible des grands nombres $N(n)/n \rightarrow c$ pour un certain $c > 0$.

8. On rappelle qu'un bord est *simple* si son contour ne visite jamais deux fois le même sommet.

Le but de [BCFS21] est d'expliquer comment déduire la convergence de $\mathbf{m}_n$ lorsque $n \rightarrow \infty$ à partir de tels résultats. L'idée est de considérer des *restrictions* de notre modèle de carte obtenues en « explorer » toute la carte à l'exception d'une infime proportion. La loi de ces restrictions est ensuite contrôlée en distance de variation totale à l'aide d'un *théorème local limite* (dans cet exemple obtenu par comptage). Le reste de l'argument consiste à établir que les restrictions considérées ne sont pas trop éloignées des cartes originales. Nous illustrons notre méthode sur l'exemple des cartes à bord simple.

Théorème 1.27 $\Leftarrow$ *limite d'échelle de quadrangulations à bord simple* [BCFS21] $\Rightarrow$

Soit une suite d'entiers $l_n \in \mathbb{N}^*$, telle que $l_n/\sqrt{2n} \rightarrow L > 0$ et soit $\mathbf{q}_n$ uniformément distribuée parmi l'ensemble des quadrangulations du disque à n faces internes et bord *simple* de degré $2l_n$. Alors l'espace métrique $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers BD_{3L} .

On pourrait être surpris d'obtenir la même limite d'échelle (à une constante près) que pour les cartes avec un bord général mais on avait déjà noté, après le théorème 1.14, que le bord devenait « simple à la limite ». À cet égard, il était prévisible d'obtenir la même limite, à un facteur de périmètre près. Ce facteur 3, en rouge, provient du fait que le périmètre du cœur est concentré autour d'un tiers du périmètre de la carte initiale. Ainsi, une quadrangulation uniforme à bord simple n'est pas trop éloignée du cœur d'une quadrangulation à bord général avec autant de faces et un périmètre 3 fois plus grand. Ce cœur n'est ensuite pas trop éloigné de la carte elle-même et on voit ainsi que, dans la limite d'échelle, une quadrangulation uniforme à bord simple est comparable à une quadrangulation uniforme à bord général de périmètre 3 fois plus grand.

Précisons un peu la méthode utilisée, sans trop rentrer dans les détails. On fixe une suite $(l_n)_n$ telle que $l_n/\sqrt{2n} \rightarrow L > 0$ et on note $p_n := 2l_n$. À $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$ fixés, on définit la (n, ε) -restriction d'une quadrangulation à bord simple pointée $(\mathbf{q}, v^\bullet)$ de la façon suivante. On définit d'abord le sommet du bord, noté $t_{1/3}$, situé à $\lfloor p_n/3 \rfloor$ le long du bord à partir de la racine. On considère ensuite la plus petite boule, centrée en $v^\bullet$, qui touche le bord entre la racine et $t_{1/3}$, à moins de εp_n de $t_{1/3}$ le long du bord. On complète cette boule en y ajoutant toutes les composantes de la carte qui ne contiennent pas le sommet cible $t_{1/3}$. On note $\mathcal{R}_n^\varepsilon(\mathbf{q}, v^\bullet)$ la carte ainsi obtenue.

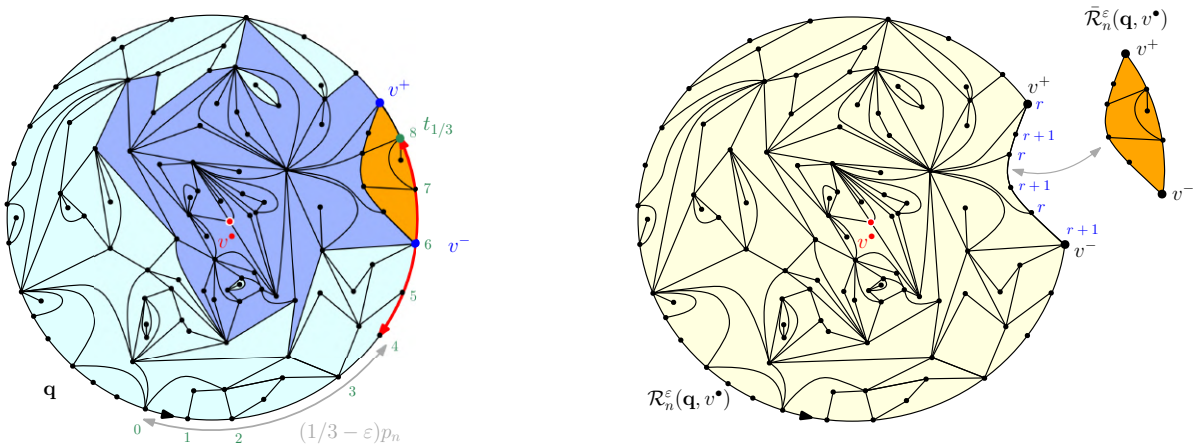


FIGURE 1.12. Définition de la restriction. On considère la plus petite boule (en bleu foncé) qui touche le bord de la carte à une longueur de bord comprise entre $(\frac{1}{3} - \varepsilon)p_n$ et $p_n/3$ de la racine. Ici, $\lfloor (\frac{1}{3} - \varepsilon)p_n \rfloor = 4$ et $\lfloor p_n/3 \rfloor = 8$. La restriction $\mathcal{R}_n^\varepsilon(\mathbf{q}, v^\bullet)$ est la carte constituée de cette boule et des composantes (en bleu clair) qui ne contiennent pas $t_{1/3}$; le complémentaire $\bar{\mathcal{R}}_n^\varepsilon(\mathbf{q}, v^\bullet)$ est la composante (orange) qui contient $t_{1/3}$.

Nous avons pris un tiers plutôt qu'un demi de sorte à pouvoir définir une seconde notion de restriction (en prenant un tiers dans l'autre sens le long du bord) telle que les complémentaires des deux restrictions soient bien séparés. Cela permet d'utiliser un argument technique de type « resampling » pour passer d'un modèle à un autre. Nous n'entrerons pas dans les détails.

Une propriété importante de cette construction est que la restriction et son complémentaire sont indépendants dans le sens où, quelle que soit la manière dont nous complétons une carte $\mathbf{r} = \mathcal{R}_n^\varepsilon(\mathbf{q}, v^\bullet)$ sur la partie du bord entre les sommets v^- et v^+ en une carte $\mathbf{q}'$, on aura encore $\mathcal{R}_n^\varepsilon(\mathbf{q}', v^\bullet) = \mathbf{r}$.

Nous pouvons maintenant présenter les grandes lignes de la méthode. On note

- ◇ X_n une carte uniformément distribuée parmi l'ensemble des quadrangulations du disque à n faces et bord simple de degré p_n ;
- ◇ Y_n le cœur d'une carte uniformément distribuée parmi l'ensemble des quadrangulations du disque à n faces et bord général de degré $3p_n$;
- ◇ $a_n := (8n/9)^{-1/4}$.

Ainsi, le modèle de référence est Y_n , pour lequel on sait que

$$a_n Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \text{BD}_{3L},$$

et on cherche à montrer le même résultat en remplaçant Y_n par X_n . Pour cela, on utilise le fait que, après pointage en un sommet uniforme, les distributions de $\mathcal{R}_n^\varepsilon(X_n)$ et de $\mathcal{R}_n^\varepsilon(Y_n)$ sont proches et les morceaux restants $a_n \mathcal{R}_n^\varepsilon(X_n)$ et $a_n \mathcal{R}_n^\varepsilon(Y_n)$ ne sont pas trop grands (lorsque ε devient petit). On peut rassembler ces conditions dans les propositions suivantes, où nous écrivons $d_{\text{TV}}(A, B)$ pour la distance en variation totale entre les distributions des variables aléatoires A et B .

Proposition 1.28 ⇐ les restrictions sont proches [BCFS21] ⇐

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\text{TV}}(\mathcal{R}_n^\varepsilon(X_n), \mathcal{R}_n^\varepsilon(Y_n)) = 0.$$

Proposition 1.29 ⇐ les morceaux restants sont petits [BCFS21] ⇐

(i) Pour tout $\delta > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(d_{\text{GH}}(a_n Y_n, a_n \mathcal{R}_n^\varepsilon(Y_n)) > \delta) = 0$.

(ii) Pour tout $\delta > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(d_{\text{GH}}(a_n X_n, a_n \mathcal{R}_n^\varepsilon(X_n)) > \delta) = 0$.

À partir de ces deux propositions, on obtient le résultat désiré en observant que

$$a_n X_n \approx a_n \mathcal{R}_n^\varepsilon(X_n) \approx a_n \mathcal{R}_n^\varepsilon(Y_n) \approx a_n Y_n.$$

Nous avons utilisé les noms génériques X_n et Y_n afin d'illustrer que la méthode n'utilise pas la spécificité de l'exemple que nous traitons et peut être utilisée en toute généralité, à condition d'avoir les propositions 1.28 et 1.29 pour une notion de restriction bien définie. Nous l'utilisons sur un modèle de cartes avec la topologie de Gromov–Hausdorff mais on peut également utiliser cette approche pour d'autres objets et d'autres topologies.

Dans l'exemple traité, la proposition 1.28 s'obtient par comptage, la proposition 1.29.(i) s'obtient à l'aide d'estimées grossières sur le modèle de référence (en utilisant les bijections classiques) et la proposition 1.29.(ii) se déduit des précédentes en utilisant un argument de type *resampling*.

1.5 Géodésiques

1.5.1 Géodésiques dans les surfaces browniennes

Les théorèmes précédents donnent naissance à des espaces métriques aléatoires possédant un intérêt propre. Au vu des simulations, on s'attend à ce que les surfaces browniennes possèdent des propriétés métriques remarquables. À l'heure actuelle, on sait décrire toutes les géodésiques entre un point tiré uniformément⁹ – appelons-le *point base* – dans une surface brownienne et tous les autres points de la surface. Cette description a tout d'abord été donnée par Jean-François Le Gall [LG10] dans le cas de la sphère. Le cas général (comprenant également le cas de la sphère) est traité dans [Bet16a] par une approche complètement différente.



FIGURE 1.13. Représentation sous forme de *cactus* d'une quadrangulation aléatoire tirée uniformément parmi les quadrangulations de la sphère à 50 000 faces. Le point base est tout en bas et la hauteur des autres points est donnée par leur distance au point base.

9. Dans une carte discrète, il n'y a qu'un nombre fini de sommets donc on peut en choisir un uniformément au hasard. Dans une surface brownienne, il y a une infinité (non dénombrable) de points donc on ne peut pas aussi aisément choisir un point au hasard. En fait, on peut montrer que la mesure uniforme sur les sommets d'une carte discrète converge conjointement avec la carte vers une mesure de probabilité sur la surface brownienne. Le terme *uniforme* fait référence à cette mesure limite.

Avant de rentrer dans les détails, nous donnons un aperçu rapide. Dans [LG10], Jean-François Le Gall montre entre autres que, pour la sphère brownienne, il y a une unique géodésique du point base à un point typique, et, pour des points particuliers, il peut y avoir jusqu'à trois géodésiques distinctes les reliant au point base. De plus, si l'on considère les uniques géodésiques vers deux points typiques, alors elles partagent une partie commune de longueur strictement positive. On obtient dans [Bet16a] les mêmes résultats pour une surface brownienne quelconque.

Dans le cas de la sphère et du disque, le théorème de Jordan dit que toute boucle est contractile, c'est-à-dire peut être continument rétractée en un point. Dans le cas de surfaces plus générales, ce n'est plus le cas. Ainsi, une boucle faisant le tour d'un cylindre par exemple ne peut être rétractée en un point. Considérons alors un point relié au point base par deux géodésiques. Si l'on suit une géodésique jusqu'au point base et que l'on repart par l'autre géodésique, on forme ainsi un boucle. On peut se demander si cette boucle est contractile ou non. On montre que l'ensemble des points pour lesquelles on forme une boucle non contractile est de dimension de Hausdorff 2. Il y a donc peu de tels points dans la mesure où les surfaces browniennes sont de dimension 4 mais tout de même une quantité conséquente dans la mesure où ils forment un ensemble de dimension 2. Enfin, on peut également regarder les points reliés au point base par trois géodésiques telles que la concaténation de deux quelconques forme une boucle non contractile. Ces points exceptionnels sont en nombre fini : par exemple, pour le tore (sans trou, $g = 1, p = 0$), il y a exactement 2 tels points!

Notre stratégie est la suivante. On fixe un nombre dénombrable de points $x^\bullet, x_1, x_2, \dots$ choisis uniformément au hasard dans une surface brownienne fixée. On établit les faits suivants, qui sont vrais presque sûrement.

- (a) Il y a une unique géodésique de $x^\bullet$ à x_i .
- (b) Il est possible de « piéger » n'importe quelle géodésique de $x^\bullet$ à un point fixé quelconque à l'aide des géodésiques reliant $x^\bullet$ aux x_i , au sens où la géodésique considérée se retrouve confondue avec les géodésiques reliant $x^\bullet$ à certains x_i sur leur partie commune, et la partie où les géodésiques aux x_i diffèrent peut être rendue arbitrairement petite en prenant des points x_i suffisamment proches du point fixé considéré.

En combinant ces faits, nous sommes en mesure d'identifier toutes les géodésiques émanant du point base $x^\bullet$. Nous allons maintenant rentrer dans les détails. Pour cela, nous aurons besoin d'une certaine compréhension de la structure d'une surface brownienne. Nous donnons une description relativement informelle à ce stade; toutefois, la lecture de la Section 2.2 peut grandement améliorer la compréhension fine de cette partie.

Rappelons que, dans un espace métrique compact $(\mathcal{X}, \delta)$, une *géodésique* d'un point $x \in \mathcal{X}$ à un point $y \in \mathcal{X}$ est un chemin continu $\varphi : [0, \delta(x, y)] \rightarrow \mathcal{X}$ tel que $\varphi(0) = x$, $\varphi(\delta(x, y)) = y$ et $\delta(\varphi(s), \varphi(t)) = |t - s|$ pour tout $s, t \in [0, \delta(x, y)]$. L'espace $(\mathcal{X}, \delta)$ est appelé *espace géodésique* si deux points quelconques sont reliés par au moins une géodésique. Puisque l'espace métrique associé à une carte est à d_{GH} -distance au plus $1/2$ d'un espace géodésique et que la limite de Gromov–Hausdorff d'une suite d'espaces géodésiques est encore un espace géodésique (voir [BBI01, Theorem 7.5.1]), on obtient d'après le théorème 1.13 que toute surface brownienne est un espace géodésique.

Fixons une surface brownienne BS et un point base $x^\bullet$. Notons g le genre de BS, p son nombre de trous, et L son périmètre (on renvoie au théorème 1.13). Nous verrons au cours de la section 2.2 que BS peut être construite comme le quotient d'une structure sous-jacente $\mathcal{M}$, constituée d'une *colonne vertébrale*, qui capture essentiellement son type d'homotopie, et sur laquelle sont greffées des forêts browniennes. Cette structure, qui est en fait un espace métrique et que l'on peut imaginer comme l'équivalent continu d'une carte à p trous et une face, généralise l'arbre continu brownien de David Aldous [Ald91, Ald93], qui est l'analogue dans le cas sphérique. Nous renvoyons à la figure 1.14 pour

un support visuel; pour l'instant, ne regardez pas les points s, t, s', t' , ainsi que les chemins correspondants Φ .

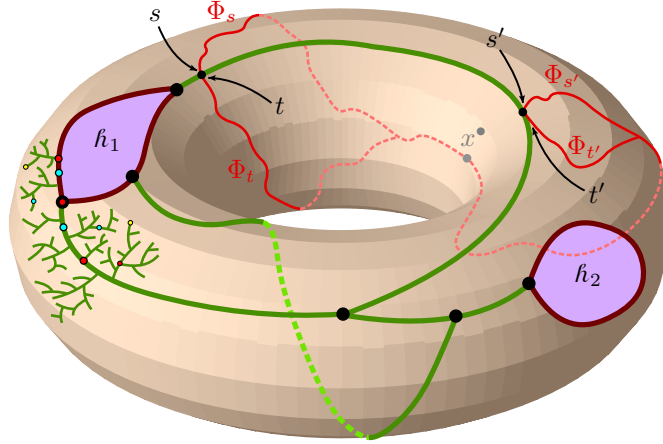


FIGURE 1.14. Description d'un tore brownien à 2 trous. La colonne vertébrale est représentée en gras, en vert et bordeaux. On peut la voir comme une carte à 2 trous et une face mais il faut également considérer que les arêtes ont une certaine « longueur ». De chaque côté des arêtes, il convient de greffer des forêts browniennes indépendantes, sauf à l'intérieur des 2 trous. Autrement dit, des arbres continus browniens sont greffés selon une distribution poissonnienne. Afin de ne pas surcharger la figure, nous n'avons représenté que huit de ces arbres sur la partie gauche de la figure. L'union de ces forêts et de la colonne vertébrale forme la structure sous-jacente $\mathcal{M}$. Les quatre points rouges sont de degré 3, les quatre points bleus sont de degré 2 et les deux points jaunes sont de degré 1.

On note $\mathcal{N}(x^\bullet)$ l'ensemble des points $x \in \text{BS}$ pour lesquels il existe au moins une paire $\{\varphi, \varphi'\}$ de géodésiques de $x^\bullet$ à x telle que la concaténation de φ avec l'inverse de φ' n'est pas homotope à 0.

Théorème 1.30 $\Leftarrow$ dimension de Hausdorff de $\mathcal{N}(x^\bullet)$ [Bet16a] $\Rightarrow$

Presque sûrement, l'ensemble $\mathcal{N}(x^\bullet)$ est vide si $g = 0$ et $p \in \{0, 1\}$; il est de dimension de Hausdorff 2 sinon.

À l'instar du degré d'un sommet dans un graphe, le *degré* d'un point $a \in \mathcal{M}$ est le nombre de composantes connexes de $\mathcal{M} \setminus \{a\}$ au voisinage de a . Les propriétés de base des forêts browniennes montrent que ce nombre est au maximum égal à 3. La *colonne vertébrale* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ est l'ensemble des points a soit de degré 2 et tels qu'aucune composante connexe de $\mathcal{M} \setminus \{a\}$ ne soit un arbre réel, soit de degré 3 et tels qu'au plus une composante connexe de $\mathcal{M} \setminus \{a\}$ soit un arbre réel. Par exemple, sur la figure 1.14, des six points colorés, seul les trois plus gros appartiennent à $\mathcal{B}$. Dans le cas $(g, p) = (0, 0)$ de la sphère, $\mathcal{B} = \emptyset$ car $\mathcal{M}$ est un arbre réel dans ce cas; en fait, c'est le seul cas où $\mathcal{B} = \emptyset$. La proposition 17 de [Bet16a] montre en particulier que seuls les points de degré 1 peuvent être identifiés dans le quotient, de sorte que l'on peut définir le degré d'un point de BS comme étant le degré de n'importe lequel de ses représentants dans $\mathcal{M}$. Remarquons que cette définition dépend a priori de $\mathcal{M}$. On note ∂BS le bord de BS. Le théorème suivant généralise le résultat principal de [LG10] traitant le cas où BS est la sphère brownienne.

Théorème 1.31 $\Leftarrow$ *structure des géodésiques au point base* [Bet16a] $\Leftarrow$

Les propriétés suivantes sont vraies presque sûrement.

- (i) Pour tout $x \in \text{BS}$, le nombre de géodésiques distinctes de $x^\bullet$ à x est égal au degré de x moins $1_{\{x \in \partial \text{BS}\}}$. En particulier, ce nombre est typiquement 1, au maximum 2 pour les points du bord et au maximum 3 pour les points intérieurs.
- (ii) La projection canonique de $\mathcal{B}$ dans BS est l'union de ∂BS et de l'ensemble $\mathcal{N}(x^\bullet)$.
- (iii) L'ensemble des points accessibles par 3 géodésiques distinctes et pour lesquels chaque paire $\{\wp, \wp'\}$ de géodésiques est telle que la concaténation de $\wp$ avec l'inverse de $\wp'$ n'est pas homotope à 0 est fini : son cardinal, que l'on note H , est
 - ◇ égal à 0 si $g = 0$ et $p \in \{0, 1\}$;
 - ◇ égal à $4g - 2$ si $g \geq 1$ et $p = 0$;
 - ◇ une variable aléatoire dont la distribution (calculable explicitement) ne dépend que de g , p et $\mathbf{L}$ et dont le support est $\{0, 1, \dots, 4g + p - 2\}$ sinon.
- (iv) On suppose que $p \neq 0$. L'ensemble $\partial \text{BS} \cap \mathcal{N}(x^\bullet)$ est fini : son cardinal est égal à $4g + 2p - 2 - H$.

Décrivons de manière informelle plus en détail ce qu'il se passe sur l'exemple de la figure 1.14. Le bord ∂BS correspond aux arêtes de couleur bordeaux et l'ensemble $\mathcal{N}(x^\bullet)$ correspond aux arêtes vertes. La projection dans BS des sommets de la carte à 2 trous correspondant à la colonne vertébrale constitue un ensemble fini¹⁰ de cardinal $4g + 2p - 2$ (égal à 6 sur la figure). Parmi ces points, H ne sont incidents à aucun trou et $4g + 2p - 2 - H$ sont incidents à un trou ; sur la figure, $H = 2$ et $4g + 2p - 2 - H = 4$. Comme la carte à 2 trous de la figure est en fait une variable aléatoire, on voit que H est également aléatoire et la distribution exacte peut être calculée dès lors que l'on connaît la distribution de cette carte à 2 trous. De plus, ces $4g + 2p - 2$ points sont précisément ceux décrits dans (iii) ou (iv), selon qu'ils appartiennent au bord ∂BS ou non.

En utilisant les propriétés de base de $\mathcal{M}$, nous pouvons classer les points de BS comme suit. L'ensemble des points accessibles depuis $x^\bullet$ par une unique géodésique a presque sûrement dimension de Hausdorff 4. L'ensemble des points atteignables depuis $x^\bullet$ par au moins deux géodésiques distinctes est un sous-ensemble dense de BS , qui est relativement petit (on peut montrer que sa dimension de Hausdorff est p.s. 2). Une partie importante de ces points appartient par ailleurs à $\mathcal{N}(x^\bullet)$, qui est aussi un ensemble de dimension p.s. 2. Enfin, l'ensemble des points pouvant être atteints par trois géodésiques est dénombrable et seul un nombre fini de ces points est tel que la concaténation de deux géodésiques quelconques n'est pas homotope à 0.

Les résultats du théorème 1.31 proviennent d'une description complète des géodésiques issues de $x^\bullet$: on montre que, dans le langage de [LG10], toutes ces géodésiques sont *simples*¹¹. On peut voir $\mathcal{M}$ comme un analogue continu d'une carte discrète avec 1 face interne et p trous. Comme pour un arbre réel (qui est l'analogue d'un arbre discret, c'est-à-dire une carte avec 1 face en genre 0), nous verrons qu'il est possible de définir un contour le long de la « face interne » de $\mathcal{M}$. Le degré d'un point $a \in \mathcal{M}$ est alors le nombre de fois que a est visité lors de ce contour, plus 1 si a est incident à un trou (car les trous ne sont pas visités lors du contour). À chaque instant de ce contour correspond une géodésique simple : notons Φ_s la géodésique simple correspondant à l'instant s .

Par ailleurs, au temps s , le contour visite une forêt greffée sur une demi-arête de la carte à 2 trous : notons $\tilde{e}_s$ cette demi-arête. Considérons maintenant un point de $\mathcal{M}$ visité à la fois aux instants s et t . Alors on peut établir un critère stipulant que la concaténation de Φ_s avec l'inverse de Φ_t est homotope

10. Cela se voit par une simple application de la formule d'Euler.

11. Il s'agit d'un équivalent continu des géodésiques obtenues dans une carte discrète à partir de la carte étiquetée codante en suivant les successeurs itérés que l'on définira à la définition 2.2 ; voir la section 2.1.

à 0 si et seulement si $\tilde{e}_s = \tilde{e}_t$. Par exemple, sur la figure 1.14, $\tilde{e}_s \neq \tilde{e}_t$, de sorte que Φ_s et Φ_t forment une boucle non homotope à 0. Au contraire, $\Phi_{s'}$ et $\Phi_{t'}$ forment une boucle homotope à 0. Cela explique la correspondance entre les ensembles considérés dans le théorème 1.31 et les éléments de la carte à 2 trous. Enfin, le terme $-1_{\{x \in \partial BS\}}$ du point (i) provient simplement du fait qu'il n'y a pas de géodésiques à l'intérieur des trous.

Nous pouvons maintenant préciser un peu plus l'idée qui permet de « piéger » les géodésiques (point (b) page 28). Pour simplifier, supposons que a est un point de degré 1 et soit s l'instant auquel il est visité lors du contour. Par densité, on peut trouver des instants s_i et s_j arbitrairement proches de s , tels que $s_i < s < s_j$ et que les points correspondants x_i et x_j dans BS appartiennent à la suite fixée de points uniformes. Par le point (a), les géodésiques reliant x_i et x_j à $x^\bullet$ sont nécessairement des géodésiques simples. À l'aide de la description des géodésiques simples, on peut montrer que ces géodésiques deviennent confondues au voisinage du point x correspondant à a dans BS. En conséquence, chaque géodésique allant de x à $x^\bullet$ est « piégée » entre ces deux géodésiques et ne peut s'échapper que par le segment de $\mathcal{M}$ reliant les points correspondant à s_i et s_j . En utilisant les propriétés fines des étiquettes sur $\mathcal{M}$, on montre qu'il est possible de choisir s_i et s_j de telle manière que la géodésique ne s'échappe pas par ce segment. Elle doit donc coïncider avec les deux autres géodésiques, au moins sur leur partie commune.

Les surfaces browniennes possèdent par ailleurs une propriété remarquable de *confluence des géodésiques*, c'est-à-dire que, contrairement à une géométrie euclidienne classique où les trois côtés d'un triangle sont d'intérieurs disjoints, les géodésiques ont tendance à se coller les unes aux autres. Si l'on regarde un triangle géodésique dans une surface brownienne, les côtés vont se coller les uns aux autres, comme on peut l'observer sur la figure 1.15.

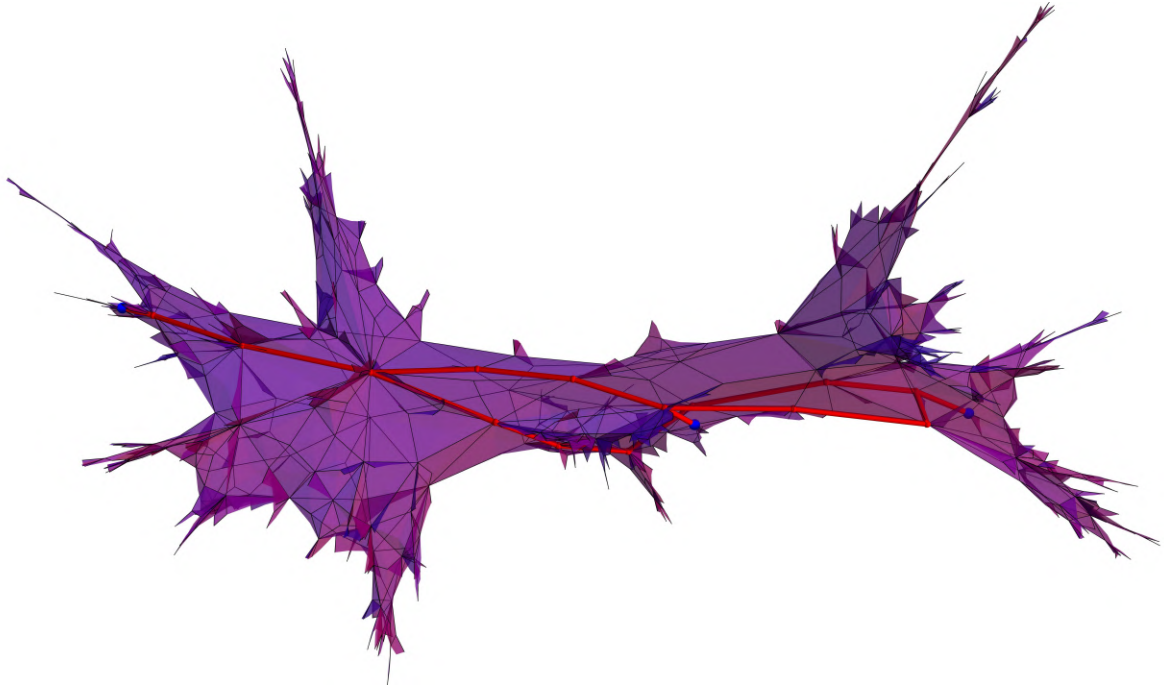


FIGURE 1.15. Triangle géodésique entre trois points (en bleu) tirés uniformément au hasard sur une quadrangulation uniforme de la sphère à 1 000 faces. On voit très nettement que les géodésiques tendent à coalescer.

Plus précisément, on a le résultat suivant, qui généralise celui obtenu par Jean-François Le Gall dans le cas sphérique [LG10, Corollary 7.7].

Théorème 1.32 $\Leftarrow$ coalescence des géodésiques [Bet16a] $\Rightarrow$

Presque sûrement, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in (0, \varepsilon)$ tel que toutes les géodésiques reliant $x^\bullet$ à des points situés à une distance au moins ε de $x^\bullet$ partagent une partie initiale commune de longueur η .

Mentionnons pour finir que la structure des géodésiques dans le cas de la sphère brownienne a été largement précisée. Omer Angel, Brett Kolesnik et Grégory Miermont [AKM17] ont notamment étudié les réseaux de géodésiques entre points particuliers. Jason Miller et Wei Qian [MQ21] poursuivent l'étude de ces réseaux et obtiennent une version plus forte de confluence. Un objet d'intérêt dans ce cadre, introduit par Grégory Miermont [Mie13] dans sa preuve de l'unicité de la sphère brownienne, est ce que l'on appelle les étoiles géodésiques. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, une *m-étoile géodésique* est un point dont émanent m géodésiques d'intérieurs disjoints. Par exemple, un point intérieur à une géodésique est une 2-étoile géodésique ; le point de coalescence de deux géodésiques à $x^\bullet$ est une 3-étoile géodésique. Jason Miller et Wei Qian [MQ21] ont montré que, presque sûrement, il n'existe pas de m -étoiles géodésiques pour $m \geq 6$ et que la dimension de Hausdorff de l'ensemble des m -étoiles géodésiques est inférieure à $5 - m$ pour $m \leq 5$. Jean-François Le Gall [LG22] montre la borne inférieure et obtient ainsi que, pour $m \in \{1, 2, 3, 4\}$, la dimension de Hausdorff de l'ensemble des m -étoiles géodésiques est égale à $5 - m$.

1.5.2 Géodésiques dans les grandes quadrangulations

Le théorème 1.31 permet d'obtenir des résultats asymptotiques pour les grandes quadrangulations. Nous adaptons la présentation et la méthode de Jean-François Le Gall [LG10] pour les obtenir. On définit la distance entre un chemin $\wp$ passant successivement par les sommets $v_1, \dots, v_k$ et un chemin $\wp'$ passant successivement par les sommets $v'_1, \dots, v'_{k'}$ dans la même carte $\mathbf{m}$ par

$$d_{\text{path}}(\wp, \wp') = \max_{i \geq 0} \{d_{\mathbf{m}}(v_{i \wedge k}, v'_{i \wedge k'})\}.$$

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite déterministe fixée de nombres réels positifs tels que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On considère une suite de variables aléatoires $\mathbf{q}_n$ distribuées comme dans l'énoncé du théorème 1.13 et, conditionnellement à $\mathbf{q}_n$, soit $v_n^\bullet$ un sommet uniformément distribué dans $V(\mathbf{q}_n)$. Pour $\varepsilon > 0$ et $v, v' \in V(\mathbf{q}_n)$, soit $\text{Geod}_n^\varepsilon(v, v')$ l'ensemble des chemins de v à v' de longueur au plus $(1 + \varepsilon)d_{\mathbf{q}_n}(v, v')$. Pour $\delta > 0$, on définit aussi $\text{Mult}_{n,\delta}^\varepsilon(v, v')$ comme le plus grand entier r pour lequel il existe r chemins $\wp_1, \dots, \wp_r \in \text{Geod}_n^\varepsilon(v, v')$ tels que $d_{\text{path}}(\wp_i, \wp_j) \geq \delta n^{1/4}$ pour tout $i \neq j$.

On note $\partial V(\mathbf{q}_n)$ l'ensemble des sommets de $V(\mathbf{q}_n)$ incidents à un trou. Commençons par la traduction de (i) en termes de grandes cartes discrètes.

Proposition 1.33 $\Leftarrow$ nombre de géodésiques au point base [Bet16a] $\Rightarrow$

Soit v_n un sommet uniformément distribué dans $V(\mathbf{q}_n)$, indépendant de $v_n^\bullet$. Alors, pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(\text{Mult}_{n,\delta}^{\varepsilon_n}(v_n^\bullet, v_n) = 1) \rightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

De plus, pour tout $\delta > 0$ et pour toute suite $(\eta_n)_n$ de nombres strictement positifs tels que $\eta_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}(\exists v \in V(\mathbf{q}_n) : d_{\mathbf{q}_n}(v, \partial V(\mathbf{q}_n)) \leq n^{1/4}\eta_n, \text{Mult}_{n,\delta}^{\varepsilon_n}(v_n^\bullet, v) \geq 3) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Enfin, pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}(\exists v \in V(\mathbf{q}_n) : \text{Mult}_{n,\delta}^{\varepsilon_n}(v_n^\bullet, v) \geq 4) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\exists v \in V(\mathbf{q}_n) : \text{Mult}_{n,\delta}^0(v_n^\bullet, v) = 3) = 1.$$

Nous avons choisi d'énoncer le dernier résultat avec des géodésiques plutôt que des géodésiques « approchées » car cela est en fait plus fort ; le résultat plus faible avec ε_n à la place de 0 est également valable. La première phrase de la proposition 1.33 signifie grossièrement que, dans une grande quadrangulation uniforme, il existe essentiellement une unique géodésique macroscopique de $v_n^\bullet$ à un sommet uniformément choisi et cela reste vrai même si l'on tolère un peu de « mou » pour les géodésiques. La seconde phrase indique que les points asymptotiquement proches du bord ne peuvent être atteints à partir de $v_n^\bullet$ par plus de deux géodésiques macroscopiques distinctes, même en autorisant un peu de « mou ». La dernière phrase dit qu'asymptotiquement, il existe des points qui peuvent être atteints à partir de $v_n^\bullet$ par trois géodésiques macroscopiques distinctes mais aucun point ne peut être atteint par quatre géodésiques macroscopiques distinctes, même avec du « mou ».

Terminons l'interprétation du théorème 1.31. Pour $\varepsilon > 0$ et $v, v' \in V(\mathbf{q}_n)$, soit $\text{HMult}_n^\varepsilon(v, v')$ le plus grand entier r pour lequel il existe r chemins $\wp_1, \dots, \wp_r \in \text{Geod}_n^\varepsilon(v, v')$ tels que, dès lors que $i \neq j$, la concaténation de $\wp_i$ avec l'inverse de $\wp_j$ n'est pas homotope à 0. Ici, homotope à 0 signifie homotope à 0 dans la surface à bord correspondant à la carte, c'est-à-dire la surface dans laquelle la carte est plongée, avec un disque ouvert retiré de chaque face externe. Notons que, comme la topologie est conservée à la limite (les anses et les trous ne disparaissent pas), on peut trouver un δ (aléatoire) suffisamment petit pour que, lorsque n est assez grand, $\text{HMult}_n^\varepsilon(v, v') \leq \text{Mult}_{n,\delta}^\varepsilon(v, v')$. Cela permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 1.34 — géodésiques formant 4 boucles non contractiles [Bet16a] —

Lorsque $n \rightarrow \infty$, $\mathbb{P}(\exists v \in V(\mathbf{q}_n) : \text{HMult}_n^{\varepsilon_n}(v_n^\bullet, v) \geq 4) \rightarrow 0$.

Pour obtenir une version discrète de (ii), il faut savoir que la quadrangulation $\mathbf{q}_n$ est codée bijectivement par une carte à une face et p trous (ce que nous allons voir dans la section 2.1) et que ce codage fait apparaître un sous-ensemble $\mathcal{B}(\mathbf{q}_n, v_n^\bullet) \subseteq V(\mathbf{q}_n)$, contrepartie discrète de $\mathcal{B}$. Pour qui est déjà familiarisé avec ce genre de bijections, il s'agit du 2-cœur de l'objet codant, c'est-à-dire l'ensemble des sommets restant après en avoir retiré itérativement tous les sommets de degré 1.

On peut voir que tous les sommets $v \in \mathcal{B}(\mathbf{q}_n, v_n^\bullet) \setminus \partial V(\mathbf{q}_n)$ satisfont $\text{HMult}_n^0(v_n^\bullet, v) \geq 2$. La proposition suivante indique grossièrement que la réciproque est à peu près vraie, à une marge près.

Proposition 1.35 — géodésiques formant au moins 2 boucles non contractiles [Bet16a] —

Pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(\exists v \in V(\mathbf{q}_n) : d_{\mathbf{q}_n}(v, \mathcal{B}(\mathbf{q}_n, v_n^\bullet) \setminus \partial V(\mathbf{q}_n)) \geq \delta n^{1/4}, \text{HMult}_n^{\varepsilon_n}(v_n^\bullet, v) \geq 2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le résultat suivant indique que les sommets $v \in V(\mathbf{q}_n)$ tels que $\text{HMult}_n^{\varepsilon_n}(v_n^\bullet, v) = 3$ sont essentiellement répartis en petites « zones » disjointes, et que le nombre de ces zones est asymptotiquement la variable aléatoire H .

Proposition 1.36 — géodésiques formant 3 boucles non contractiles [Bet16a] —

Soit $A_{n,\delta}^\varepsilon(j)$ l'évènement sur lequel il existe j sommets $v_1, \dots, v_j \in V(\mathbf{q}_n)$ tels que $\text{HMult}_n^\varepsilon(v_n^\bullet, v_i) = 3$ pour $1 \leq i \leq j$ et $d_{\mathbf{q}_n}(v_i, v_{i'}) \geq \delta n^{1/4}$ pour tout $i \neq i'$. Alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n,\delta}^{\varepsilon_n}(j) \setminus A_{n,\delta}^{\varepsilon_n}(j+1)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n,\delta}^{\varepsilon_n}(j) \setminus A_{n,\delta}^{\varepsilon_n}(j+1)) = \mathbb{P}(H = j),$$

où H est la variable aléatoire définie au point (iii) du théorème 1.31.

Enfin, on a un résultat similaire pour les sommets v du bord pour lesquels $\text{HMult}_n^{\varepsilon_n}(v_n^\bullet, v) \geq 2$.

Proposition 1.37  *géodésiques formant 2 boucles non contractiles sur le bord* [Bet16a] 

On suppose que $p \neq 0$ et on note $B_{n,\delta}^\varepsilon(j)$ l'événement sur lequel il existe j sommets $v_1, \dots, v_j \in \partial V(\mathbf{q}_n)$ tels que $\text{HMult}_n^\varepsilon(v_n^\bullet, v_i) \geq 2$ pour $1 \leq i \leq j$ et $d_{\mathbf{q}_n}(v_i, v_{i'}) \geq \delta n^{1/4}$ pour tout $i \neq i'$. Alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_{n,\delta}^\varepsilon(j) \setminus B_{n,\delta}^\varepsilon(j+1)) = \mathbb{P}(H = 4g + 2p - 2 - j)$$

et le résultat reste vrai si l'on remplace la $\liminf$ par une $\limsup$.

Combinatoire bijective

Les résultats de limite d'échelle du chapitre précédent ont pu être obtenus à l'aide de codages bijectifs puissants permettant essentiellement de se ramener à des fonctions à valeurs réelles aléatoires bien connues en théorie des probabilités. Outre cette application, ces méthodes bijectives possèdent un intérêt propre et permettent également d'obtenir ou d'interpréter de nombreuses formules énumératives pour le comptage de cartes. Nous présentons ces méthodes, dans lesquelles s'inscrit le travail [Bet22], et précisons la méthodologie déployée pour l'application aux surfaces browniennes.

Parallèlement à ces méthodes bijectives, nous présentons également des bijections entre différentes classes de cartes que nous avons introduites et étudiées dans [Bet14, Bet20]. Ces bijections que nous appelons de type *slit-slide-sew* permettent d'interpréter des identités combinatoires entre deux classes de cartes similaires où certains paramètres sont très légèrement modifiés.

2.1 Codage bijectif des cartes par des objets plus simples	35
2.1.1 La bijection originelle	36
2.1.2 Quadrangulations sur une surface orientable	39
2.1.3 Cartes biparties sur une surface orientable	39
2.1.4 Cartes biparties sur une surface non orientable	41
2.1.5 Cartes non biparties	52
2.2 Construction des surfaces browniennes et méthodologie	56
2.2.1 Existence de limites	56
2.2.2 Unicité de la limite	63
2.2.3 Sphère brownienne et constructions alternatives dans le cas du disque	69
2.3 Approches bijectives sur les cartes	70
2.3.1 Présentation	70
2.3.2 Ajout de deux coins	75
2.3.3 Transfert d'un coin	79



2.1 Codage bijectif des cartes par des objets plus simples

Nous présentons ici les codages bijectifs de cartes *à la Schaeffer*. Pour les codages de type *bourgeonnant*, nous renvoyons par exemple au manuscrit d'habilitation de Marie Albenque [Alb20]. À l'instar de la section 1.4, nous présentons les choses de façon incrémentale, allant de généralisation en généralisation. Dans un souci d'harmonisation, nous nous permettons de modifier quelques détails mineurs par rapport aux constructions des travaux cités et d'adopter une présentation qui peut varier par rapport aux présentations classiques. Les cartes considérées dans cette section seront **sans bord**.

Introduisons tout d'abord quelques définitions supplémentaires. Dans une carte, on appelle *coin* un secteur angulaire délimité par deux arêtes successives autour d'un sommet. Au cours de ce chapitre, nous enracinons plutôt les cartes en distinguant un coin – toujours appelé *racine* – plutôt qu'une arête orientée. Une bijection évidente entre les coins et les arêtes orientées d'une carte montre que ces points de vue sont équivalents (sur la figure 2.1, l'arête orientée correspondant naturellement au coin ρ est l'arête e , orientée dans la direction nord-est-sud-ouest). Le sommet incident à la racine est appelé *sommet racine* et l'arête visitée juste après la racine dans le contour, dans le sens direct¹, de la face contenant la racine est appelée *arête racine*. Voir la figure 2.1.

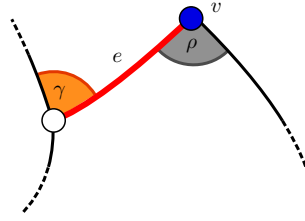


FIGURE 2.1. La racine (grise) ρ , le sommet racine (bleu) v et l'arête racine (rouge) e . La racine de la carte retournée est γ (en orange).

Pour une carte $\mathbf{m}$, on définit sa carte *retournée* $\bar{\mathbf{m}}$ comme étant la même carte, enracinée à l'unique autre coin définissant la même arête racine. Avec le point de vue où les cartes sont enracinées sur une arête orientée, cela revient simplement à prendre l'orientation inverse de la racine.

Passons maintenant à quelques principes très généraux des constructions. Les objets codants seront toujours des couples formés d'un paramètre $\varepsilon \in \{+, -\}$ et d'une carte *unicellulaire*, c'est-à-dire ayant une *unique face*, et dont certains sommets seront *étiquetés*, ce qui signifie qu'une fonction à valeurs entières est définie sur les sommets en question. Ces étiquettes vérifieront de plus une relation de compatibilité entre les différents sommets étiquetés et auront comme *minimum la valeur 1*. Lorsqu'un coin est incident à un sommet étiqueté, on définit systématiquement son étiquette comme étant celle du sommet en question.

Par ailleurs, nous coderons des cartes d'une surface donnée qui seront *biparties* (cette contrainte pourra être levée ultérieurement) et *pointées*, c'est-à-dire munies d'un sommet distingué, noté généralement $v^\bullet$. À partir de ce sommet distingué, nous assignons à tous les sommets de la carte pointée $(\mathbf{m}, v^\bullet)$ une étiquette entière positive donnant sa distance au sommet distingué :

$$l(v) := d_{\mathbf{m}}(v^\bullet, v), \quad v \in V(\mathbf{m}). \quad (2.1)$$

À l'exception du sommet distingué $v^\bullet$, les sommets de la carte codée feront partie des sommets de la carte codante et conserveront leurs étiquettes.

Sur les figures, les arêtes des cartes à coder seront en noir et les arêtes des cartes codantes en vert.

2.1.1 La bijection originelle

Commençons par la bijection par laquelle tout a commencé : la *bijection de Cori–Vauquelin–Schaeffer* [CV81, Sch98] codant les quadrangulations planes pointées. Un *arbre bien étiqueté* est une carte plane à une face $\mathbf{t}$ dont les sommets sont étiquetés par une fonction $l : V(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbb{N}^*$ de minimum 1 telle que $l(u) - l(v) \in \{-1, 0, 1\}$ dès lors que u et v sont reliés par une arête de $\mathbf{t}$.

1. Le *sens direct* dans le contour d'une face s'entend toujours autour d'un point intérieur de la face, c'est-à-dire qu'on longe le bord en gardant les arêtes à notre droite. Cette convention peut sembler contre-intuitive dans le cas d'une face non bornée.

La bijection de Cori–Vauquelin–Schaeffer s'établit entre l'ensemble des quadrangulations planes pointées à n faces et l'ensemble des couples formés d'un paramètre $\varepsilon \in \{+, -\}$ et d'un arbre bien étiqueté à n arêtes. En particulier, ce dernier ensemble est facile à dénombrer et la bijection donne donc une interprétation combinatoire à la formule

$$\frac{2}{n+2} 3^n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

paramètre ε → $\frac{2}{n+2}$ (oubli du sommet distingué) → 3^n (étiquetage des sommets) → $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ (nombre d'arbres)

dénombrant le nombre de quadrangulations planes à n faces. Comme mentionné à la fin de la section 1.1, d'après la formule d'Euler, ces cartes ont $n+2$ sommets. Par ailleurs, il est connu que le nombre d'arbres à n arêtes est le n -ième *nombre de Catalan*, surligné en vert. Enfin, chaque arbre à n arêtes peut être étiqueté d'exactly 3^n façons car choisir un étiquetage des sommets revient à fixer pour chaque arête la différence, dans $\{-1, 0, 1\}$, entre l'étiquette de son extrémité la plus éloignée du sommet racine et celle de son autre extrémité. Cela donne un étiquetage défini à une constante additive près qui est fixée par la condition de minimum égal à 1.

On réfère à la figure 2.2 pour une illustration de la construction, détaillée ci-dessous.

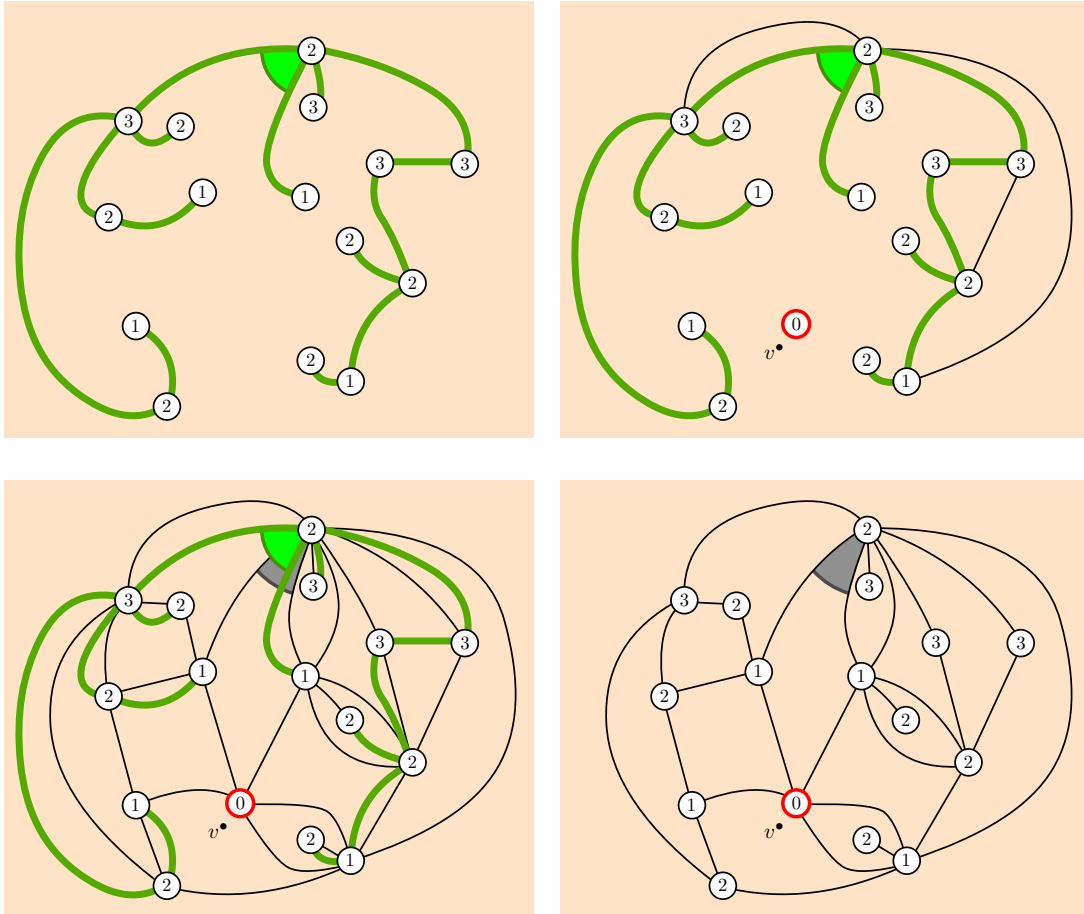


FIGURE 2.2. La bijection de Cori–Vauquelin–Schaeffer. On part d'un arbre bien étiqueté, on ajoute un sommet d'étiquette 0, on relie chaque coin à son successeur, et on efface les arêtes initiales. Réciproquement, on part d'une quadrangulation pointée, on étiquette ses sommets, on ajoute une nouvelle arête par face et on efface les arêtes initiales ainsi que le sommet distingué. Sur cet exemple, $\varepsilon = +$.

Des arbres bien étiquetés aux quadrangulations. On considère un arbre bien étiqueté (t, l) et un paramètre $\varepsilon \in \{+, -\}$.

Étape 1. On ajoute un sommet d'étiquette 0. Dans l'unique face de t , on ajoute dans un premier temps un sommet $v^\bullet$ auquel on assigne l'étiquette $l(v^\bullet) := 0$.

Étape 2. On relie les coins à leurs successeurs. Puis, pour chaque coin c de l'unique face de t , on définit son *successeur* $\text{succ}(c)$ comme étant le premier coin suivant d'étiquette strictement inférieure à $l(c)$, dans l'ordre défini par le contour, dans le sens direct, de la face de t ou, à défaut, le coin incident à $v^\bullet$. Ce dernier cas ne se produit que pour les coins d'étiquette 1. On relie alors d'une nouvelle arête chaque coin à son successeur, sans que les arêtes (anciennes ou nouvelles) se croisent².

Étape 3. On efface les arêtes initiales et on enracine. On efface les arêtes initiales de t . Enfin, on enracine la carte obtenue q en fonction de la racine de t , selon la convention de la figure 2.3; on obtient la carte pointée $(q, v^\bullet)$ qui s'avère être une quadrangulation.

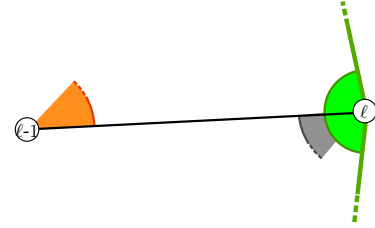


FIGURE 2.3. La racine de t est en vert; celle de q est le coin gris si $\varepsilon = +$, ou le coin orange si $\varepsilon = -$.

Des quadrangulations aux arbres bien étiquetés. On part d'une quadrangulation pointée $(q, v^\bullet)$.

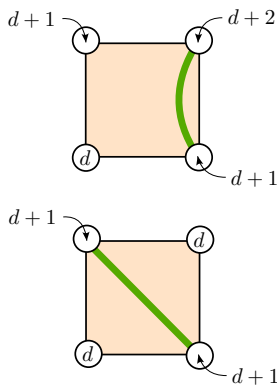


FIGURE 2.4. Ajout d'une nouvelle arête en fonction du type de face.

Étape I. On étiquette et on définit la valeur du paramètre. On commence par étiqueter les sommets de q par (2.1). Le caractère biparti de la carte assure que les étiquettes de deux sommets reliés par une arête diffèrent d'exactly 1. Si le sommet racine de q a une étiquette plus grande que l'autre extrémité de l'arête racine, alors on pose $\varepsilon := +$; sinon, on remplace q par sa retournée $\bar{q}$ et on pose $\varepsilon := -$.

Étape II. On ajoute une arête par face. Lorsque l'on suit le contour d'une face, les étiquettes ne peuvent être que de deux types : $d, d+1, d+2, d+1$, ou bien $d, d+1, d, d+1$, pour un certain entier d . On ajoute sur chaque face une nouvelle arête, comme décrit sur la figure 2.4.

Étape III. On efface les arêtes initiales et on enracine. On supprime les arêtes initiales, ainsi que le sommet $v^\bullet$. On obtient alors un arbre t dont les sommets sont étiquetés par l , que l'on enracine en fonction de la racine³ de q , selon la convention de la figure 2.5.

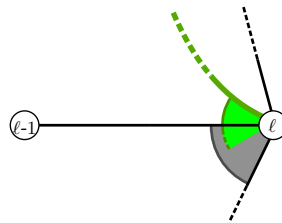


FIGURE 2.5. Enracinement de t à partir de la racine de q . La racine de q est représentée en gris et la racine de t est en vert. L'existence de l'arête verte (de t) est assurée par les règles de la construction.

2. La condition de non-croisement assure l'unicité de la construction sauf dans le cas particulier où il y a un unique coin d'étiquette 1. Le cas échéant, il faut veiller à ce que l'arête le reliant à $v^\bullet$ soit la dernière dans le sens horaire : .

3. On rappelle que, suite à l'étape I, q est soit la quadrangulation originale, soit sa retournée et que le sommet racine de q a une étiquette plus grande que l'autre extrémité de son arête racine, comme sur la figure 2.5.

2.1.2 Quadrangulations sur une surface orientable

Pour les surfaces orientables, la bijection de Chapuy–Marcus–Schaeffer [CMS09] étend la bijection précédente en une bijection entre l'ensemble des quadrangulations biparties pointées de genre $g \geq 0$ à n faces et l'ensemble des couples formés d'un paramètre $\varepsilon \in \{+, -\}$ et d'une *carte unicellulaire bien étiquetée*, définie comme une carte à une unique face $\mathbf{u}$ dont les sommets sont étiquetés par une fonction $l : V(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbb{N}^*$ de minimum 1 telle que $l(u) - l(v) \in \{-1, 0, 1\}$ dès lors que u et v sont reliés par une arête de $\mathbf{u}$, de genre g à n arêtes.

La description de la bijection de la section précédente s'adapte directement, en remplaçant *arbre* par *carte unicellulaire de genre g* , ainsi que *quadrangulation plane* par *quadrangulation bipartie de genre g* .

2.1.3 Cartes biparties sur une surface orientable

Nous passons maintenant à la généralisation de Bouttier–Di Francesco–Guitter [BDG04] qui permet de coder les cartes générales (on se restreint tout de même aux cartes biparties pour le moment) a priori planes, mais, comme dans le cas des quadrangulations, la généralisation aux surfaces orientables ne pose pas de problème du point de vue de la description [Cha09]. On fixe une surface orientable $\mathcal{S}$.

Définition 2.1 — mobile unicellulaire étiqueté —

Un couple $(\mathbf{u}, l)$ est un *mobile unicellulaire étiqueté (de $\mathcal{S}$)* s'il remplit les conditions suivantes :

- ◇ $\mathbf{u}$ est une carte à une unique face de $\mathcal{S}$ dont l'ensemble de sommets est partitionné en $V_\bullet(\mathbf{u}) \sqcup V_\circ(\mathbf{u})$ de telle sorte que chaque arête relie un sommet de $V_\bullet(\mathbf{u})$ à un sommet de $V_\circ(\mathbf{u})$;
- ◇ $l : V_\circ(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbb{N}^*$ est une fonction de minimum 1;
- ◇ le sommet racine appartient à $V_\circ(\mathbf{u})$.

Il y a donc maintenant deux types de sommets, les éléments de $V_\bullet(\mathbf{u})$, appelés *sommets verts*, et ceux de $V_\circ(\mathbf{u})$, appelés *sommets blancs*, seuls ces derniers étant munis d'étiquettes. Un coin incident à un sommet blanc (resp. à un sommet vert) est appelé *coin blanc* (resp. *coin vert*). Sauf mention explicite, nous ne considérerons que les coins blancs de $\mathbf{u}$, qui sont donc étiquetés.

Définition 2.2 — successeur d'un coin d'étiquette au moins 2 —

Dans un mobile unicellulaire étiqueté $(\mathbf{u}, l)$, on définit le *successeur* $\text{succ}(c)$ d'un coin c d'étiquette $l(c) \geq 2$ comme le premier coin suivant d'étiquette strictement inférieure à $l(c)$, dans l'ordre défini par le contour, dans le sens direct, de l'unique face de $\mathbf{u}$.

Le fait que le minimum de l est égal à 1 assure l'existence d'un tel coin.

Définition 2.3 — mobile unicellulaire bien étiqueté —

Le mobile unicellulaire étiqueté $(\mathbf{u}, l)$ est *bien étiqueté* si, pour chaque coin c d'étiquette $l(c) \geq 2$, on a $l(\text{succ}(c)) = l(c) - 1$.

La définition précédente est une reformulation de la condition originale suivante : pour chaque coin c , l'étiquette du coin suivant est supérieure ou égale à $l(c) - 1$. Autrement dit, lu selon le contour de l'unique face dans le sens direct, les étiquettes des coins forment une marche dont les pas sont à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Cette dernière définition est plus compacte et plus simple à manipuler, surtout si l'on s'intéresse à l'énumération, car elle a l'avantage d'être *locale*, en ce sens qu'il suffit de regarder les étiquettes des paires de coins consécutifs pour savoir si un mobile unicellulaire étiqueté

est bien étiqueté ou non. Nous avons préféré utiliser la formulation de la définition 2.3 car elle se généralise plus naturellement dans le cas non orientable que nous verrons dans la section suivante.

Passons maintenant à la construction, qui s'établit entre l'ensemble des cartes biparties pointées et l'ensemble des couples formés d'un paramètre $\varepsilon \in \{+, -\}$ et d'un mobile unicellulaire bien étiqueté; un exemple se trouve sur la figure 2.7. Seule l'étape II diffère réellement des constructions précédentes.

Des mobiles unicellulaires bien étiquetés aux cartes biparties. On considère un mobile unicellulaire bien étiqueté (u, l) et un paramètre $\varepsilon \in \{+, -\}$.

Étape 1. On ajoute un sommet d'étiquette 0. Dans l'unique face de u , on ajoute un sommet $v^\bullet$ auquel on assigne l'étiquette $l(v^\bullet) := 0$.

Étape 2. On relie les coins à leurs successeurs. On étend la définition 2.2 en définissant le coin incident à $v^\bullet$ comme successeur aux coins d'étiquette 1. On relie sans croisement⁴ chaque coin à son successeur.

Étape 3. On efface les arêtes initiales et on enracine. On efface les arêtes initiales de u et on enracine la carte pointée obtenue $(m, v^\bullet)$ selon la convention de la figure 2.3.

Des cartes biparties aux mobiles unicellulaires bien étiquetés. On part d'une carte pointée $(m, v^\bullet)$.

Étape I. On étiquette et on définit la valeur du paramètre. On étiquette les sommets de m par (2.1). Si le sommet racine de m a une étiquette plus grande que l'autre extrémité de l'arête racine, alors on pose $\varepsilon := +$; sinon, on remplace m par sa retournée $\bar{m}$ et on pose $\varepsilon := -$.

Étape II. On ajoute un sommet vert par face que l'on relie à certains coins. Dans chaque face de m , on ajoute un sommet vert. Ensuite, lorsque l'on suit le contour dans le sens direct d'une face, on relie sans croisements au sommet vert ajouté dans la face chaque coin dont l'étiquette est supérieure à celle du coin précédent; voir la figure 2.6.

Étape III. On efface les arêtes initiales et on enracine. On supprime les arêtes initiales et le sommet $v^\bullet$. On obtient un mobile unicellulaire (u, l) enraciné selon la convention de la figure 2.5.



FIGURE 2.6. Généralisation de la règle de la figure 2.4. On relie au sommet vert les coins visités juste après une augmentation d'étiquette lors du contour dans le sens direct.

Mentionnons que, si $(m, v^\bullet)$ est une carte bipartie pointée correspondant au couple $(\varepsilon, (u, l))$, alors

- (i) $V(m) \setminus \{v^\bullet\}$ correspond à $V_\circ(u)$ et l'étiquette d'un sommet blanc est sa distance à $v^\bullet$ dans m ;
- (ii) $F(m)$ correspond à $V_\bullet(u)$: de plus, le degré d'une face de m est le double du degré du sommet vert correspondant;
- (iii) les cartes m et u ont le même nombre d'arêtes;
- (iv) pour chaque coin blanc c de u , exactement une arête de m relie le sommet incident à c à un sommet plus proche de $v^\bullet$, toutes les autres arêtes le reliant à des sommets plus éloignés de $v^\bullet$.

4. Comme précédemment, dans le cas particulier où il y a un unique coin d'étiquette 1, il faut veiller à ce que l'arête le reliant à $v^\bullet$ soit la dernière dans le sens horaire : .

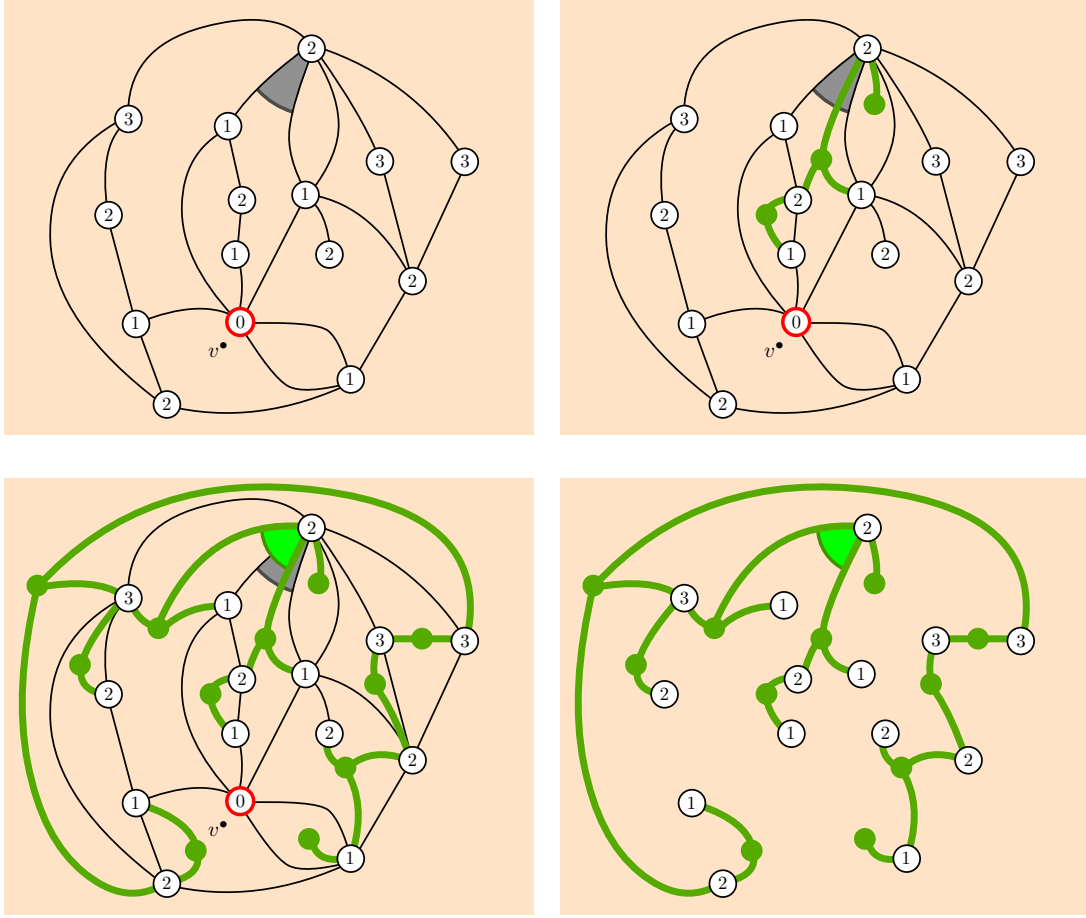


FIGURE 2.7. La bijection de Bouttier–Di Francesco–Guitter. On procède de façon similaire à la bijection de Cori–Vauquelin–Schaeffer à la différence qu’on ajoute maintenant dans chaque face un sommet vert que l’on relie à la moitié des coins de la face selon la règle de la figure 2.6. Le point (iv) s’observe, par exemple, sur le coin blanc incident par le haut au sommet racine, d’étiquette 2, du mobile. De ce coin émanent 4 arêtes de $\mathbf{m}$, une seule reliant ce sommet à un sommet d’étiquette 1, les trois autres le reliant à des sommets d’étiquette 3.

Dans le cas des quadrangulations, le point (ii) montre que les sommets verts sont tous de degré 2. On peut donc les supprimer et (ii) devient une correspondance entre les faces de la quadrangulation et les arêtes de l’objet codant. La définition 2.3 devient dans ce cas équivalente à la propriété que les étiquettes de sommets voisins diffèrent d’au plus un. En effet, si cette propriété est vérifiée, alors la condition de la définition 2.3 est immédiatement vérifiée. Inversement, supposons qu’il existe une arête reliant deux sommets dont les étiquettes diffèrent d’au moins 2. Alors il existe un coin incident au sommet de plus grande étiquette dont le successeur est incident à l’autre sommet, ce qui met la condition de la définition 2.3 en défaut. On retrouve finalement bien les cartes unicellulaires bien étiquetées de la section 2.1.2.

2.1.4 Cartes biparties sur une surface non orientable

2.1.4.1 Présentation

La notion de carte se généralise facilement aux surfaces non orientables (plan projectif, bouteille de Klein, etc.). Le codage bijectif des quadrangulations a été traitée par Guillaume Chapuy et Maciej

Dolęga [CD17] et nous obtenons le cas général dans [Bet22]. Dans [CD17], les auteurs travaillent en fait sur des cartes non pointées et déduisent une bijection pour les cartes pointées a posteriori, en utilisant ce qu'ils appellent un *oracle* décidant, pour chaque carte pointée, d'un réenracinement particulier donnant une racine incidente au sommet distingué. Notre présentation dans [Bet22] diffère de la leur et permet de travailler directement sur les cartes pointées de façon similaire au cas orientable. C'est cette approche que nous présentons ici.

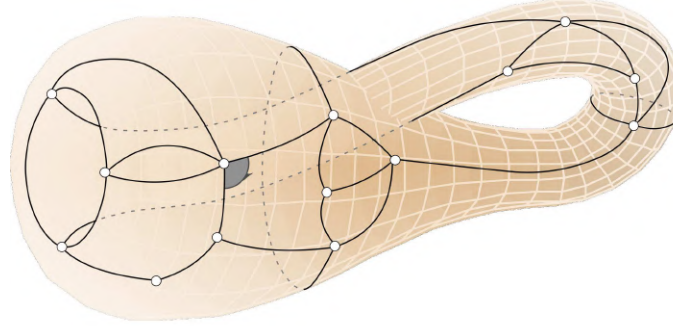


FIGURE 2.8. Une carte de la bouteille de Klein. Dans le cas de surfaces non orientables, la racine de la carte est donnée avec une orientation locale.

Nous considérons dorénavant une surface compacte sans bord. Par le théorème de classification, elle est soit orientable et homéomorphe à la surface de genre h pour un certain $h \in \{0, 1, \dots\}$, soit non orientable et homéomorphe à la somme connexe de h plans projectifs pour un $h \in \{1/2, 1, 3/2, \dots\}$. Le nombre h est appelé le *type* de la surface. On fixe une surface $\mathcal{S}$, orientable ou non.

La définition 1.1 est encore valable dans ce cadre mais, maintenant, la racine d'une carte est un coin *orienté*, c'est-à-dire muni d'une des deux orientations locales possibles. Nous la noterons généralement $\vec{\rho}$ (pour une carte générale) ou $\vec{\tau}$ (pour une carte unicellulaire) et la représenterons par un petit secteur angulaire muni d'une demi-pointe de flèche sur les figures. Le coin (non orienté) correspondant à la racine sera appelé *coin racine*, le sommet incident à la racine sera encore appelé *sommet racine* et l'arête incidente à la racine sera encore appelée *arête racine*; voir la figure 2.9.

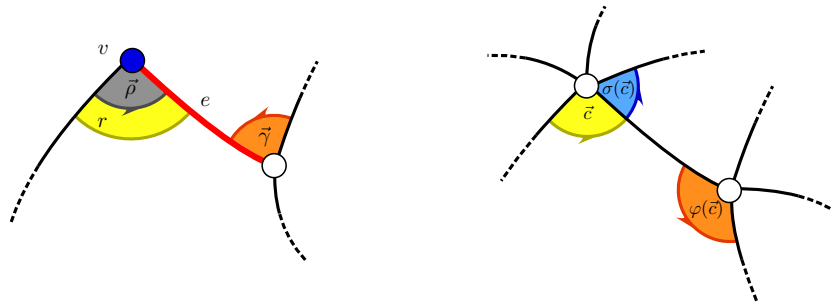


FIGURE 2.9. À gauche. La racine (grise) $\vec{\rho}$, le coin racine (jaune) r , le sommet racine (bleu) v et l'arête racine (rouge) e . La racine de la carte retournée est $\vec{\tau}$ (en orange). À droite. Un coin orienté $\vec{c}$ et ses images par σ et φ .

Un coin orienté donne une orientation locale au sommet auquel il est incident et à la face qui le contient car celle-ci est homéomorphe à un disque, par définition. Pour un coin orienté $\vec{c}$, on note $\sigma(\vec{c})$ le coin orienté suivant autour du sommet incident à $\vec{c}$, dans l'orientation donnée par $\vec{c}$. On note aussi $\varphi(\vec{c})$ le coin orienté suivant $\vec{c}$ dans le contour de la face contenant $\vec{c}$, dans l'orientation donnée par $\vec{c}$. L'invo-

lution de retournement consiste maintenant à définir la *retournée* $\bar{\mathbf{m}}$ d'une carte $\mathbf{m}$ enracin e en $\vec{\rho}$ en la r enracinant au coin orienté $\sigma^{-1} \circ \varphi(\vec{\rho})$; voir la figure 2.9. On note $\text{opp}(\vec{c})$ le coin orienté correspondant au même coin que $\vec{c}$, avec l'orientation oppos e.

La bijection que nous allons présenter s'établit, comme dans le cas orientable, entre l'ensemble des cartes biparties pointées et l'ensemble des couples formés d'un paramètre $\varepsilon \in \{+, -\}$ et d'un mobile unicellulaire bien étiqueté. La définition de ces derniers objets nécessite toutefois d'être g n ralis e car la définition 2.2 n'a plus de sens pour une surface non orientable (la définition 2.1 reste valable). Les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) restent vraies dans le cas non orientable.

Des cartes pointées vers les mobiles étiquetés, il s'agit de définir quels sont les coins qui sont reliés au sommet vert dans l'étape II. Notre construction est bas e sur une règle qui donne une orientation à chaque coin de la carte. Nous introduisons ce que nous appelons des *boucles de niveau*; celles-ci peuvent être imagin es comme des lignes de niveau en topographie, où la hauteur d'un sommet donné est sa distance au sommet distingué $v^\bullet$. L'orientation de la racine donne une orientation canonique à toutes ces boucles de niveau. En utilisant ces orientations locales, nous appliquons ensuite des règles similaires à celles du cas orientable afin de terminer la construction.

Des mobiles étiquetés vers les cartes pointées, il s'agit de définir la notion de successeur pour savoir quels coins relier dans l'étape 2. Cette notion sera définie à partir d'une orientation locale canonique des coins blancs donn e par l'orientation de la racine. Comme nous travaillons avec des cartes à une face enracin es, l'orientation de la racine donne une orientation naturelle simple à tous les coins en suivant simplement le contour de la face unique. Bien qu'il soit tentant d'effectuer la construction avec cette orientation pour les coins, on voit sur la figure 2.10 que ce ne serait pas satisfaisant. Considérons par exemple un sommet vert de degré 2 dont les voisins blancs sont étiquetés 1 et 2 et supposons que, dans le contour de la face unique au voisinage du sommet vert, le sommet étiqueté 2 est visité juste avant le sommet étiqueté 1 de chaque côté. Nous nous attendrions alors à ce que les deux arêtes supplémentaires soient trac es du sommet étiqueté 2 au sommet étiqueté 1. Cela crée une face de degré 2 correspondant au sommet vert de degré 2, violant ainsi la propriété (ii) ci-dessus. De ce fait, nous devons considérer *deux* orientations sur les cartes unicellulaires, ces deux orientations co citant dans le cas orientable.

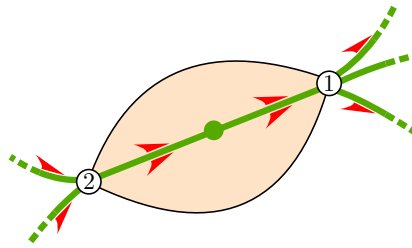


FIGURE 2.10. L'orientation des coins induite par la racine ne peut pas fonctionner. Les demi-pointes de flèches indiquent la direction du contour donn e par l'orientation de la racine.

2.1.4.2 Orientation cohérente des coins dans un mobile unicellulaire

Les coins, blanc et vert, d'un mobile unicellulaire sont naturellement orientés et arrangés dans l'ordre $\vec{\tau}, \varphi(\vec{\tau}), \varphi^2(\vec{\tau}), \dots, \varphi^{2|\mathbb{E}(\mathbf{u})|-1}(\vec{\tau})$. Cette orientation sera appel e leur *orientation induite par la racine* et cet arrangement sera appelé *contour induit par la racine*. Nous avons vu que cette orientation ne convient pas pour la définition du successeur. L'idée est alors qu'on ne peut pas orienter les coins indépendamment; tous les coins de ce que nous appellerons un *cycle de coins* doivent être orientés en

Expliquons maintenant comment orienter un coin blanc c d'un mobile unicellulaire étiqueté (u, l) , en construisant dans le même temps son cycle de coins. Nous commençons par orienter temporairement c en définissant $\vec{c}$ comme le coin c orienté selon son orientation induite par la racine. Nous construisons ensuite algorithmiquement une liste de coins orientés **blanc et vert** comme suit. Nous débutons le processus en initialisant $\vec{c}_{\text{current}}$ à $\vec{c}$ et la liste à la liste vide. Ensuite, itérativement, nous ajoutons le coin correspondant à $\vec{c}_{\text{current}}$ à la liste et,

- Nous nous arrêtons lorsque $\vec{c}_{\text{current}}$ est mis à jour vers $\vec{c}$ à nouveau.

L'algorithme ci-dessus termine et génère une liste qui ne contient pas à la fois un coin et son opposé.

44

Définition 2.5 — orientation cohérente —

L'orientation ci-dessus du coin c est appelée son **orientation cohérente**.

Dans le cas orientable, si on oriente la racine par défaut dans le sens indirect, l'orientation cohérente coïncide avec l'orientation induite par la racine.

Définition 2.6 — cycle de coins —

Le **cycle de coins** de c est la liste des coins correspondant aux coins orientés de la liste ci-dessus, considérée à décalage cyclique et à renversement près.

Le cycle de coins d'un coin c est également le cycle de coins de tout coin blanc du cycle ayant pour étiquette $l(c)$. On peut donc en fait orienter tous ces coins à la fois. Par ailleurs, le cycle de coins des coins d'étiquette 1 est le contour de la face de u : l'orientation cohérente des coins d'étiquette 1 est donc l'orientation induite par la racine. On peut maintenant généraliser la définition 2.2.

Définition 2.7 — successeur d'un coin d'étiquette au moins 2 —

Dans un mobile unicellulaire étiqueté (u, l) , on définit le **successeur** $\text{succ}(c)$ d'un coin c d'étiquette $l(c) \geq 2$ comme le premier coin suivant d'étiquette strictement inférieure à $l(c)$, dans l'ordre défini par le contour de l'unique face de u , parcourue dans le sens donné par l'orientation cohérente de c .

Avec cette définition, la définition 2.3 reste valable. Pour les quadrangulations, comme dans la section 2.1.2, les mobiles unicellulaires bien étiquetés prennent une forme particulièrement simple. Les sommets verts peuvent être supprimés car ils sont toujours de degré 2 et la définition 2.3 est encore équivalente à la propriété que les étiquettes de sommets voisins diffèrent d'au plus un. En effet, si cette propriété est vérifiée, alors la condition de la définition 2.3 est immédiatement vérifiée, quelle que soit l'orientation des coins. Inversement, supposons qu'il existe deux sommets voisins dont les étiquettes diffèrent d'au moins 2. Considérons alors un coin orienté $\vec{c}$ incident au sommet de plus grande étiquette et tel que $\varphi(\vec{c})$ est incident au sommet de plus petite étiquette. En utilisant la notation $|\cdot|$ pour désigner le coin correspondant à un coin orienté, le cycle de coins de $|\vec{c}|$ contiendra donc $|\vec{c}|$ et $|\sigma(\vec{c})|$ côte à côte. Les étiquettes vérifient $l(\vec{c}) = l(\sigma(\vec{c})) > l(\varphi(\vec{c})) + 1$, de sorte que, soit $|\varphi(\vec{c})| = \text{succ}(|\vec{c}|)$, soit $|\sigma^{-1} \circ \varphi(\vec{c})| = \text{succ}(|\sigma(\vec{c})|)$. Dans les deux cas, c'est une contradiction avec la définition 2.3.

Une simplification similaire se produira également pour les triangulations ; nous y reviendrons au cours de la section 2.1.5. On peut décrire un premier sens de la bijection, illustré sur la figure 2.13.

Des mobiles unicellulaires bien étiquetés aux cartes biparties. On considère un mobile unicellulaire bien étiqueté (u, l) et un paramètre $\varepsilon \in \{+, -\}$.

Étape 1. On ajoute un sommet d'étiquette 0. Dans l'unique face de u , on ajoute un sommet $v^\bullet$ auquel on assigne l'étiquette $l(v^\bullet) := 0$.

Étape 2. On relie les coins à leurs successeurs. On étend la définition 2.7 en définissant le coin incident à $v^\bullet$ comme successeur aux coins d'étiquette 1. On relie sans croisement⁵ chaque coin à son successeur.

Étape 3. On efface les arêtes initiales et on enracine. On efface les arêtes initiales de u et on enracine la carte pointée obtenue $(m, v^\bullet)$ selon la convention de la figure 2.12.

5. Ici encore, le cas particulier où il y a un unique coin c d'étiquette 1 demande une condition supplémentaire. Tous les coins d'étiquette 2 appartiennent au même cycle de coin. S'ils sont orientés comme le coin c , l'arête reliant c à $v^\bullet$ doit être la dernière dans le sens horaire, sinon cette arête doit être la première dans le sens horaire.

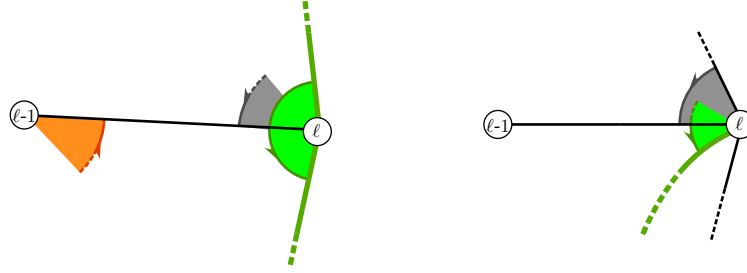


FIGURE 2.12. Convention d'enracinement pour des racines orientées, généralisant les conventions des figures 2.3 et 2.5 (où, dans le cas orientable, on oriente les racines par défaut dans le sens indirect). La racine de $\mathbf{u}$ est en vert ; celle de $\mathbf{m}$ est en gris si $\varepsilon = +$, ou orange si $\varepsilon = -$.

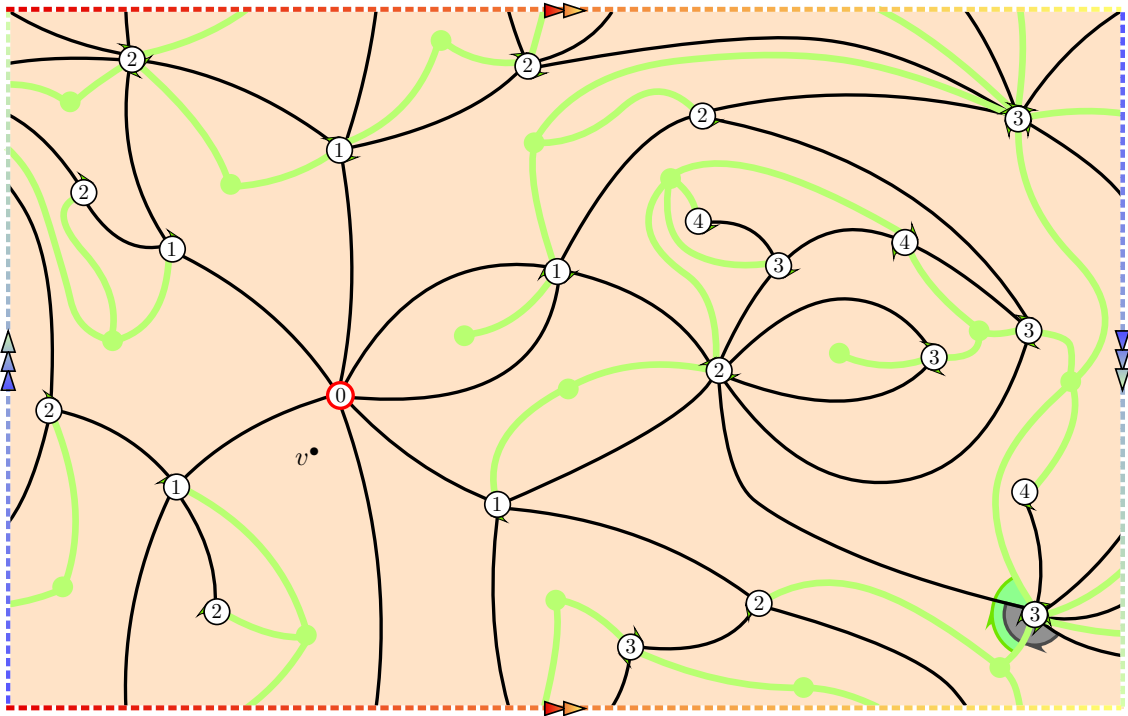


FIGURE 2.13. La bijection, d'un mobile unicellulaire bien étiqueté à une carte bipartie pointée (sur la bouteille de Klein). Les demi-pointes de flèche vertes représentent l'orientation cohérente des coins. Sur cet exemple, celle-ci coïncide avec l'orientation induite par la racine sauf pour le coin d'étiquette 4 en bas à droite. Par ailleurs, $\varepsilon = +$.

2.1.4.3 Boucles de niveau dans une carte bipartie pointée

Voyons maintenant comment généraliser l'étape II au cas non orientable. Les coins à relier au sommet vert de la face seront sélectionnés à l'aide de boucles orientées longeant les arêtes, appelées *boucles de niveau*. Cela permettra de savoir dans quel sens se déplacer pour appliquer une règle du type de celle de la figure 2.6. Commençons par construire les boucles de niveau sans orientation. On fixe une carte bipartie pointée $(\mathbf{m}, v^\bullet)$, étiquetée par (2.1), et on suppose dorénavant que **le sommet racine de $\mathbf{m}$ a une étiquette plus grande que l'autre extrémité de l'arête racine**. Il sera pratique d'orienter les arêtes de $\mathbf{m}$ vers $v^\bullet$, c'est-à-dire que chaque arête est orientée de son extrémité de plus grande étiquette vers son extrémité de plus petite étiquette : on appelle cette orientation l'*orientation géodésique*.

On considère un coin orienté arbitraire de $\mathbf{m}$ et on note i son étiquette. Partant de ce coin orienté,

on regarde l'arête incidente :

- ◊ si elle mène à un sommet d'étiquette inférieure ou égale à i , on se déplace le long de son bord jusqu'au coin suivant dans la face;
- ◊ si elle mène à un sommet d'étiquette $i + 1$, on la traverse.

On itère le procédé (sans changer la valeur i), au sens où, chaque fois que l'on rencontre une arête, on se déplace le long de son bord si elle mène à un sommet d'étiquette inférieure ou égale à i , ou on la traverse si elle mène à un sommet d'étiquette $i + 1$, et ce, jusqu'à ce que l'on revienne au coin initial en fermant la boucle. La boucle obtenue ne dépend pas de l'orientation du coin initial.

Définition 2.8 — *boucle de niveau* —

On appelle **boucle de niveau** issue du coin c la boucle définie par le processus ci-dessus avec c comme coin initial. Son **niveau** est l'entier positif $l(c)$.

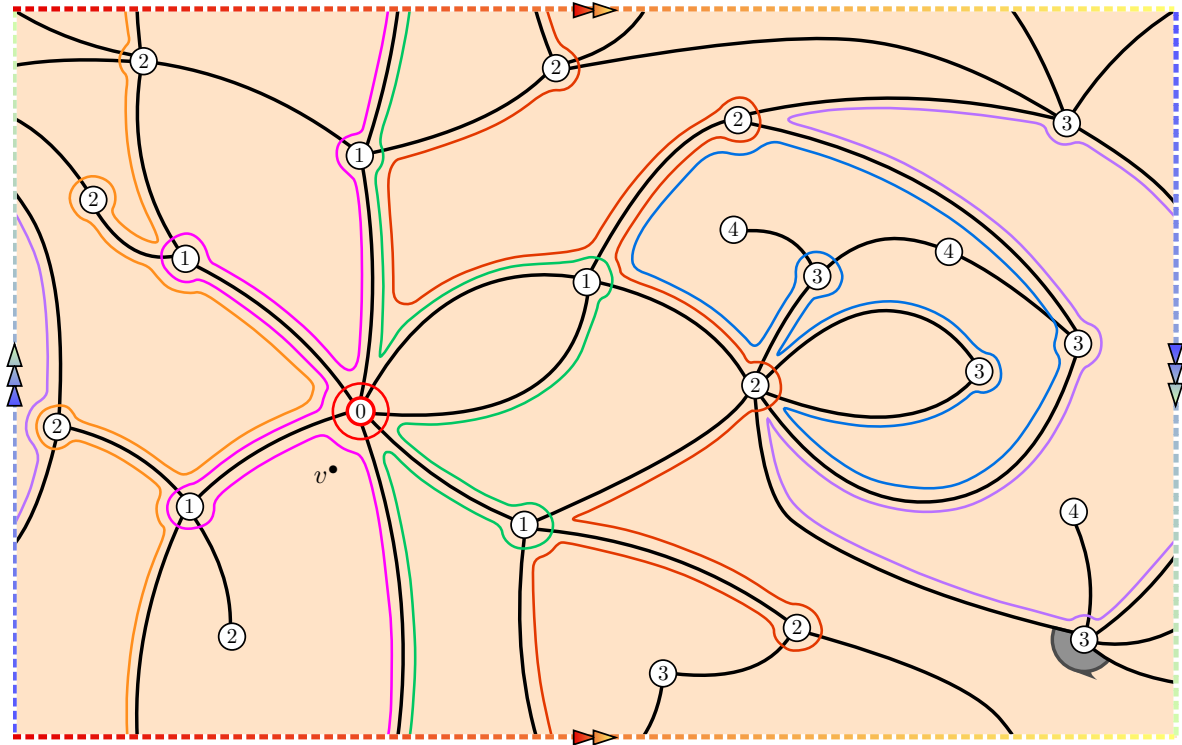


FIGURE 2.14. Boucles de niveau d'une carte bipartie pointée. Nous n'avons pas représenté les boucles qui suivent les contours des faces, appelées boucles de niveau maximal. La boucle rouge est de niveau 0, les boucles rose et verte sont de niveau 1, les boucles rouge foncé et orange sont de niveau 2 et les boucles bleue et violette sont de niveau 3.

Notons quelques propriétés immédiates. La même boucle de niveau ne peut pas visiter deux fois le même coin et deux boucles de même niveau ne peuvent pas toutes deux visiter le même coin. Les étiquettes des coins visités par une boucle de niveau i sont toutes inférieures ou égales à i , et au moins l'une d'elle est égale à i . Il n'y a qu'une seule boucle qui tourne autour d'un sommet : c'est la boucle de niveau 0 et elle tourne autour de $v^\bullet$. En effet, si une boucle tourne autour d'un sommet d'étiquette i , cela signifie que le sommet n'est connecté qu'à des sommets d'étiquette $i + 1$; le seul tel sommet est $v^\bullet$. Une boucle de niveau qui ne traverse aucune arête suit le contour d'une face ; son niveau est l'étiquette

maximale parmi celles des coins de la face. De telles boucles seront appelées *boucles de niveau maximal*. La figure 2.14 montre toutes les boucles de niveau non maximal d'une carte bipartie pointée.

Proposition 2.9 $\Leftarrow$ nombre de boucles passant par un coin [Bet22] $\Rightarrow$

Soit c un coin d'une face f . Soit i l'étiquette de c et $j \geq i$ l'étiquette maximale des coins de f . Alors, le coin c est visité par exactement $j - i + 1$ différentes boucles de niveau, une pour chaque niveau de $\{i, i + 1, \dots, j\}$.

Sur les figures, les boucles de niveau supérieur seront toujours plus loin des bords des arêtes que les boucles de niveau inférieur. Cela assure qu'elles ne se coupent pas, car, chaque fois que deux boucles rencontrent la même arête, si celle de niveau inférieur longe son bord, alors celle de niveau supérieur fait de même. La figure 2.15 représente la situation autour d'un sommet et à l'intérieur d'une face.

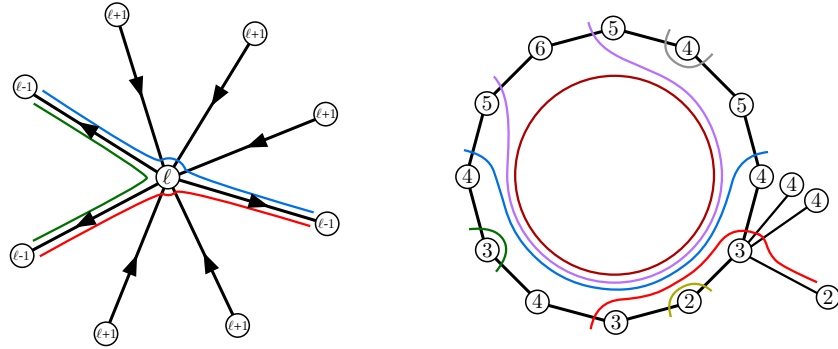


FIGURE 2.15. À gauche. Des morceaux de boucles de niveau ℓ autour d'un sommet d'étiquette ℓ . L'orientation géodésique des arêtes est représentée par des pointes de flèches noires. À droite. Morceaux de boucles de niveau à l'intérieur d'une face. Par exemple, la boucle bleue est de niveau 4; elle traverse les arêtes dont les extrémités sont étiquetées 4 et 5, et elle se déplace le long d'arêtes dont les extrémités sont toutes deux étiquetées 4 ou moins. Notons que deux morceaux de boucles de même niveau peuvent se rencontrer à l'extérieur de la face et donc appartenir à la même boucle.

On considère un coin orienté $\vec{c}$ non incident à $v^\bullet$, ainsi que la boucle de niveau issue de $\vec{c}$, orientée dans l'orientation donnée par $\vec{c}$. Le premier coin orienté d'étiquette $l(\vec{c}) - 1$ après $\vec{c}$ visité par cette boucle est appelé *coin parent* de $\vec{c}$ et noté $\text{par}(\vec{c})$; voir la figure 2.16.

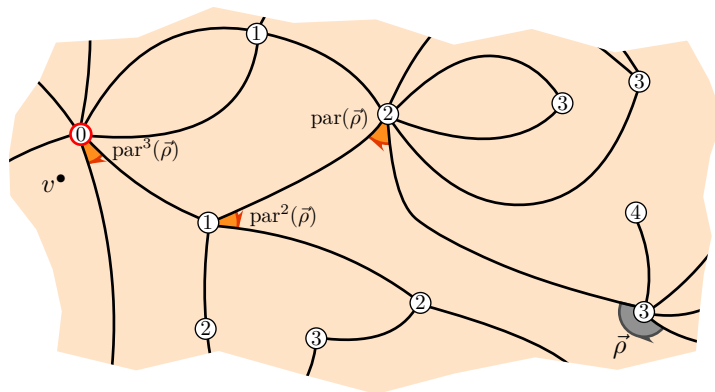


FIGURE 2.16. Coins parents itérés de la racine.

2.1.4.4 Orientation des boucles de niveau

Il s'agit maintenant d'orienter les boucles et de préciser comment cette orientation indique quels coins seront à sélectionner au cours de l'étape II. Les boucles seront orientées les unes après les autres et l'orientation d'une boucle définira en son long des repères appelés *arrêts* correspondant aux coins qui seront à sélectionner.

Définition des arrêts après orientation [Figure 2.17]. Chaque fois que l'on oriente une boucle de niveau i , on lui ajoute des arrêts aux emplacements des coins étiquetés i que la boucle visite juste après avoir visité un coin étiqueté $i - 1$. De manière équivalente, pour chaque face visitée par la boucle, il y a un arrêt à chaque coin étiqueté i mis à part le premier.

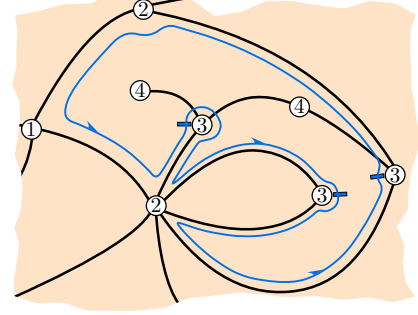


FIGURE 2.17. Définition des arrêts (symbolisés par des rectangles de la couleur de la boucle) d'une boucle de niveau une fois orientée. Cette boucle est au niveau 3; elle a donc des arrêts aux coins étiquetés 3 directement précédés de coins étiquetés 2.

À travers la bijection, il s'avère que les boucles de niveau correspondent aux cycles de coins du mobile unicellulaire codant⁶. Le processus d'orientation des boucles de niveau doit donc correspondre au processus d'orientation des cycles de coins utilisé précédemment. Comme ce dernier utilise le contour induit par la racine, nous serons amenés à construire le mobile unicellulaire à la volée. Il nous faudra être capable de passer d'un arrêt au suivant dans ce qui correspond au contour induit par la racine du mobile codant. La manière d'explorer les portions de boucle de niveau entre deux arrêts consécutifs sera ainsi dictée par l'orientation globale de la face du mobile d'encodage et non par l'orientation de la boucle de niveau.

Mise à jour du coin orienté courant [Figure 2.18]. Cette étape est la plus complexe. Elle permet de passer d'un coin blanc du mobile unicellulaire codant au suivant dans le contour induit par la racine, tout en orientant certaines boucles de niveau dans la foulée. On la décompose en trois sous-étapes. On considère un coin orienté $\vec{c}$ de $\mathbf{m}$ tel que $l(\varphi(\vec{c})) < l(\vec{c})$.

Tourner autour du sommet initial. Si la boucle de niveau, appelons-la λ , issue de $\sigma(\vec{c})$ n'a pas déjà été orientée, alors on l'oriente dans l'orientation de $\sigma(\vec{c})$ et l'on définit ses arrêts comme expliqué ci-dessus. Ensuite, on considère le plus petit entier **strictement positif** j tel que λ a un arrêt à l'emplacement de $\sigma^j(\vec{c})$. (Notons que $j = 1$ si la boucle de niveau n'était pas orientée auparavant.) Ensuite, on oriente, dans l'orientation de $\sigma^j(\vec{c})$, chaque boucle de niveau visitant $\sigma^j(\vec{c})$ qui n'est pas encore orientée, et on définit ses arrêts.

Se déplacer le long du bord de la face. On considère le plus petit entier **strictement positif** k tel que

- ◇ soit il y a un arrêt à l'emplacement de $\varphi^{-k} \circ \sigma^j(\vec{c})$;
- ◇ soit la boucle de niveau issue de $\varphi^{-k} \circ \sigma^j(\vec{c})$ n'a pas encore été orientée et l'orienter dans l'orientation de $\varphi^{-k} \circ \sigma^j(\vec{c})$ crée un arrêt à l'emplacement de $\varphi^{-k} \circ \sigma^j(\vec{c})$.

Dans ce dernier cas (ce qui ne peut arriver que dans le cas (d) de la figure 2.18), on oriente la boucle issue de $\varphi^{-k} \circ \sigma^j(\vec{c})$ dans l'orientation de $\varphi^{-k} \circ \sigma^j(\vec{c})$ et on définit ses arrêts.

Tourner autour du sommet final. Enfin, on considère le plus petit entier **positif** l qui vérifie la relation $l(\varphi(\sigma^l \circ \varphi^{-k} \circ \sigma^j(\vec{c}))) = l(\sigma^l \circ \varphi^{-k} \circ \sigma^j(\vec{c})) - 1$.

On pose finalement

$$\text{upd}(\vec{c}) := \sigma^l \circ \varphi^{-k} \circ \sigma^j(\vec{c}).$$

6. Cela n'est pas du tout évident. On peut toutefois remarquer que le cycle de coins des coins d'étiquette 1 de $\mathbf{u}$, qui est le contour de la face de $\mathbf{u}$, correspond à la boucle de niveau 0, qui tourne autour de $v^\bullet$ sans jamais traverser le mobile.

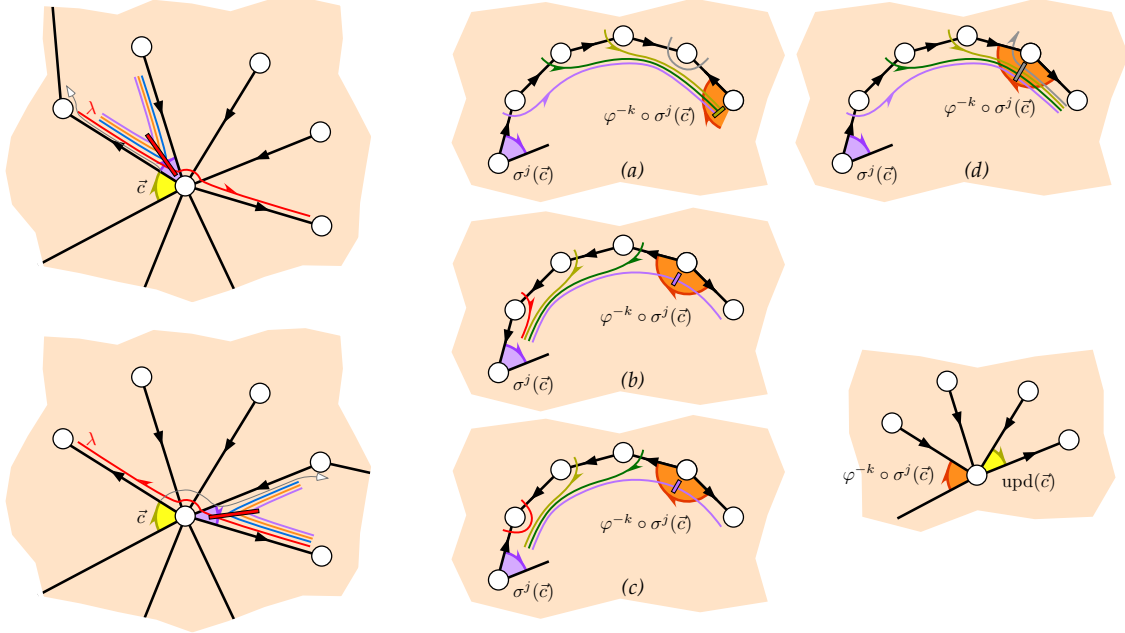


FIGURE 2.18. Toutes les possibilités de mise à jour du coin courant $\vec{c}$. **À gauche.** On tourne autour du sommet initial jusqu'à trouver un arrêt (la flèche gris clair indique la suite du processus). En haut, la boucle λ peut ou non avoir été orientée auparavant. En bas, elle a nécessairement été orientée auparavant. **Au milieu et en haut à droite.** On suit le contour de la face jusqu'à un arrêt. Les orientations de la boucle grise dans (a) et de la boucle rouge dans (c) n'interviennent pas à ce stade; elles peuvent ou non avoir été orientées auparavant. Dans (b) et (c), la boucle violette peut être orientée dans les deux sens, soit à ce stade, soit avant (si à ce stade, nécessairement dans l'orientation de $\sigma^j(\vec{c})$). Dans (d), la boucle grise peut avoir été orientée avant ou à ce stade. **En bas à droite.** On tourne autour du dernier sommet jusqu'à atteindre une arête dirigée vers $v^\bullet$.

Voyons sur la figure 2.19 un exemple de mise à jour. On utilise le même code couleur que sur la figure 2.18 : le coin orienté courant est en jaune, il devient violet après la première sous-étape, puis orange après la seconde. La dernière sous-étape n'est pas représentée, le coin orienté final étant égal au coin orienté (orange) obtenu après la seconde sous-étape (c'est-à-dire que $l = 0$).

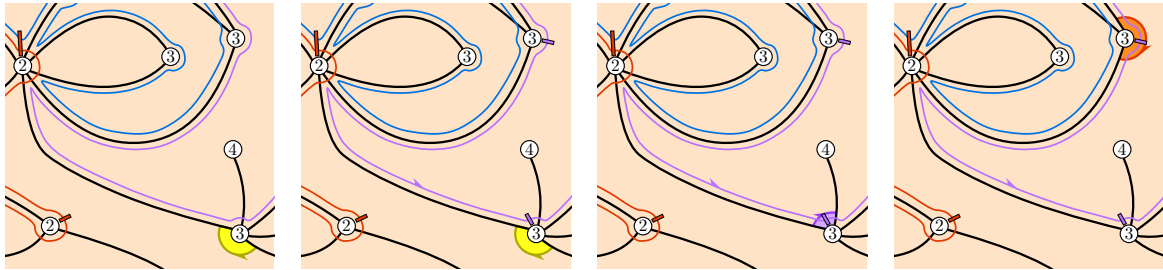


FIGURE 2.19. Mise à jour d'un coin orienté. On tourne autour du sommet initial, on longe la face et on tourne autour du sommet final. Ici, λ est la boucle violette; comme elle n'est pas initialement orientée, on commence par l'orienter. On a $j = 1$, $k = 2$ et $l = 0$.

On peut maintenant définir l'autre sens de la bijection, illustré sur la figure 2.22.

Des cartes biparties aux mobiles unicellulaires bien étiquetés. On part d'une carte pointée $(m, v^\bullet)$.

Étape I. On étiquette et on définit la valeur du paramètre. On étiquette les sommets de m par (2.1). Si le sommet racine de m a une étiquette plus grande que l'autre extrémité de l'arête racine, alors on pose $\varepsilon := +$; sinon, on remplace m par sa retournée $\bar{m}$ et on pose $\varepsilon := -$.

Étape II. On ajoute un sommet vert par face que l'on relie à certains coins.

IIa. Construction des boucles. On construit toutes les boucles de niveau.

IIb. Orientation des premières boucles [Figure 2.20]. Pour chaque entier $i \in \{1, \dots, l(\vec{\rho})\}$, on oriente la boucle de niveau issue du i -ième parent itéré $\text{par}^i(\vec{\rho})$ de la racine dans l'orientation de $\text{par}^i(\vec{\rho})$.

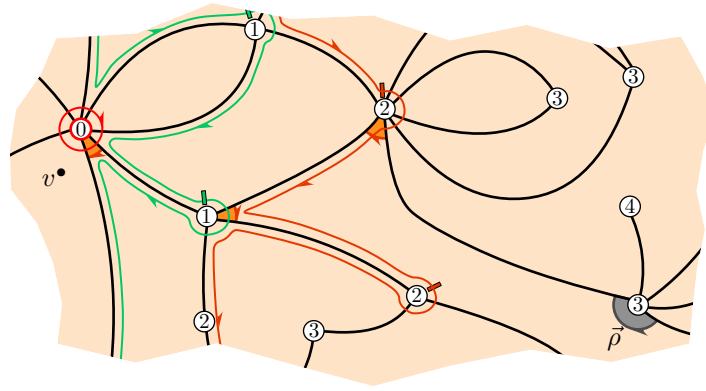


FIGURE 2.20. Orientation des boucles de niveau issues des parents itérés de la racine.

IIc. Orientation des boucles [Figure 2.21]. On initialise le coin orienté courant à la racine puis on le met à jour itérativement en suivant le procédé décrit précédemment, jusqu'à ce que chaque boucle de niveau soit orientée.

IId. Ajout des sommets verts et des arêtes vertes [Figure 2.21]. Dans chaque face de m , on ajoute un sommet vert que l'on relie, sans croisements, à tous les coins de la face où il y a un arrêt.

Étape III. On efface les arêtes initiales et on enracine. On supprime les arêtes initiales et le sommet $v^\bullet$. On obtient un mobile unicellulaire (u, l) enraciné selon la convention de la figure 2.12.

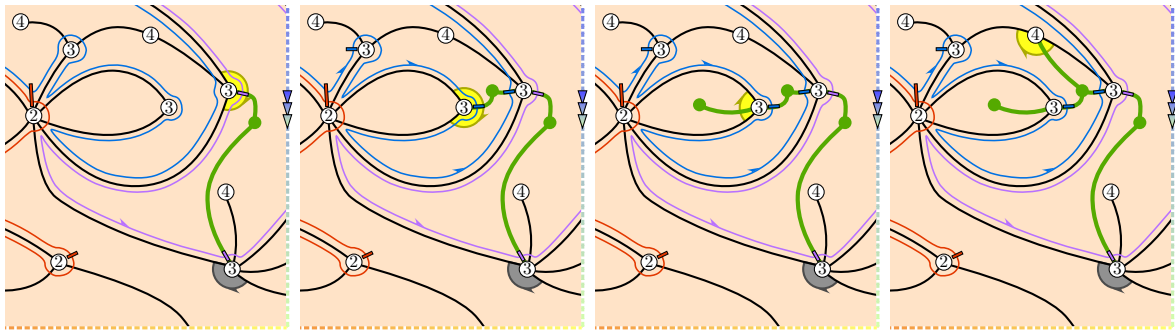


FIGURE 2.21. Quatre premières mises à jour du coin courant après son initialisation à $\vec{\rho}$. On construit le mobile en parallèle. Les boucles de niveau maximal ne sont toujours pas représentées.

Comme sur la figure 2.21, les étapes IIc et IId peuvent être réalisées conjointement au sens où, lors du procédé de mise à jour du coin orienté courant, on peut relier les coins violet et orange de la figure 2.18 au sommet vert de la face à laquelle ils appartiennent. Par définition, ces coins contiennent un arrêt et il n'y en a pas d'autre entre eux le long de la face. Cela revient en fait à construire le mobile selon son contour induit par la racine.

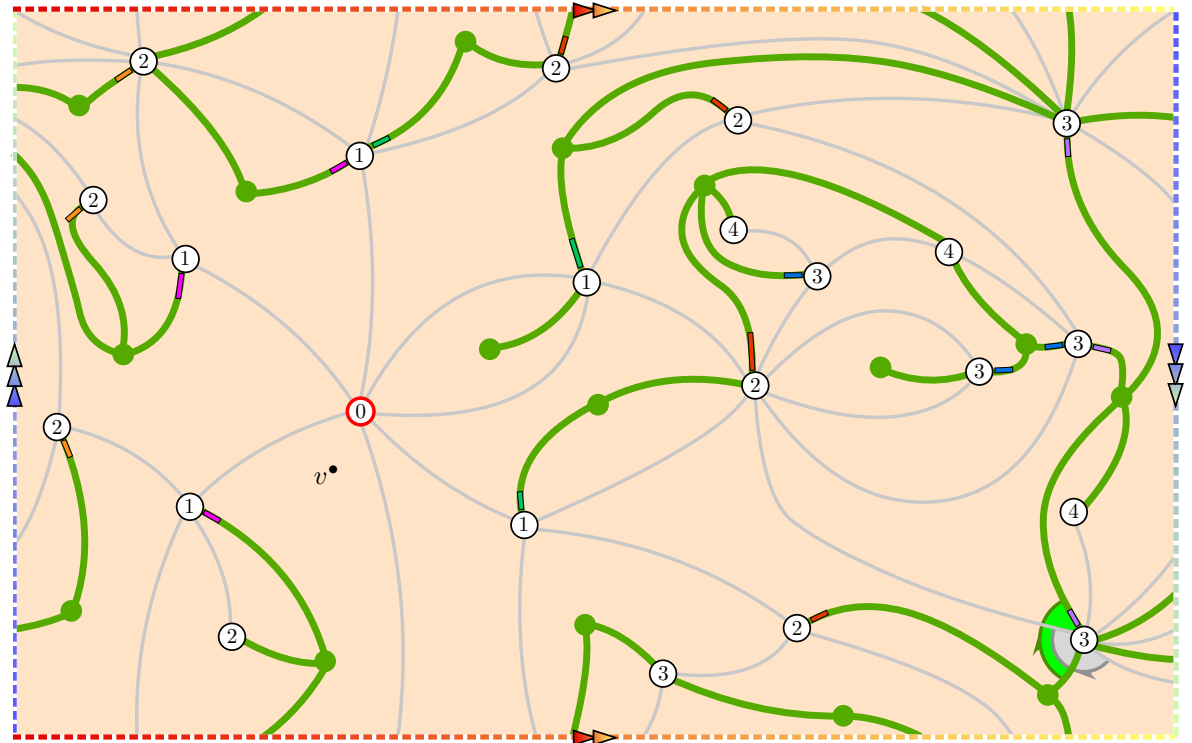


FIGURE 2.22. La bijection, d'une carte bipartie pointée à un mobile unicellulaire bien étiqueté. Les arrêts des boucles de niveau maximal, non représentées, sont à tous les coins dont l'étiquette est maximale parmi ceux de leur face.

2.1.5 Cartes non biparties

On relâche dorénavant l'hypothèse que les cartes à coder sont biparties. L'idée est de les modifier légèrement afin de pouvoir appliquer les bijections précédentes. On considère une carte pointée $(\mathbf{m}, v^\bullet)$ et on l'étiquette par (2.1) comme précédemment. Il peut maintenant exister des arêtes dont les extrémités ont même étiquette : on dira que ces arêtes sont *parallèles à $v^\bullet$* . On augmente la carte $\mathbf{m}$ en une carte $\hat{\mathbf{m}}$ en ajoutant, sur chaque arête parallèle à $v^\bullet$, un sommet supplémentaire, auquel on assigne l'étiquette commune de ses deux voisins plus 1. Cela étend la définition de l à $V(\hat{\mathbf{m}})$ et, clairement, pour $v \in V(\hat{\mathbf{m}})$, on a toujours $l(v) = d_{\hat{\mathbf{m}}}(v^\bullet, v)$.

On applique alors à $(\hat{\mathbf{m}}, v^\bullet)$, qui est bipartie, la construction de la section 2.1.4.4 pour les cartes biparties pointée. On modifie légèrement le mobile unicellulaire bien étiqueté obtenu $(\hat{\mathbf{u}}, l)$ de la façon suivante. Chaque sommet de $V(\hat{\mathbf{m}}) \setminus V(\mathbf{m})$ est par construction de degré 2 et il y a des arrêts aux deux coins qui lui sont incidents, car leurs étiquettes sont des maximums locaux le long des faces incidentes. En conséquence, un tel sommet est également de degré 2 dans $\hat{\mathbf{u}}$; on le supprime et on fusionne les deux arêtes incidentes en une seule arête. Après fusion, une telle arête est appelée *arête diamantée* et se voit assigner l'étiquette du sommet supprimé. On note $(\mathbf{u}, l)$ la carte résultante, la fonction l étant

définie sur un sous-ensemble des sommets et arêtes de $\mathbf{u}$. Enfin, si l'arête racine de $\mathbf{m}$ est parallèle à $v^\bullet$, alors le sommet racine de $\hat{\mathbf{u}}$ est l'un des sommets ajoutés de $\hat{\mathbf{m}}$ (et le paramètre vaut $\varepsilon = -$). Dans ce cas, on transgresse la définition habituelle de racine en déclarant pour racine de $\mathbf{u}$ l'arête résultant de la suppression du sommet racine de $\hat{\mathbf{u}}$, ainsi que le côté et l'orientation locale induits par la racine de $\hat{\mathbf{u}}$. Une telle carte sera dite *enracinée sur une arête*. Voir la figure 2.23.

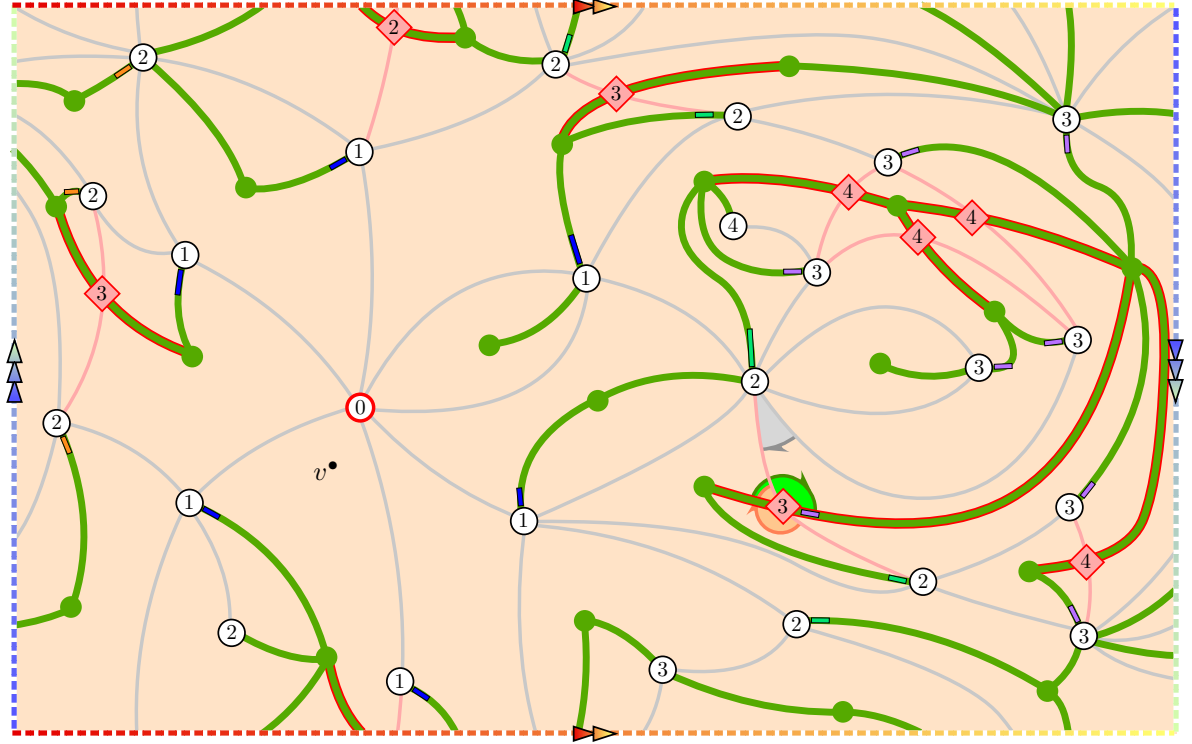


FIGURE 2.23. La bijection pour une carte générale. Les arêtes parallèles à $v^\bullet$ sont représentées en rouge et les sommets ajoutés sont représentés par des carrés rouges. Sur cet exemple, la racine de $\hat{\mathbf{m}}$ (en gris comme avant) est telle que le sommet racine est plus proche de $v^\bullet$ que l'autre extrémité de l'arête racine ; il faut donc considérer la retournée dont la racine est en orange. Les arêtes diamantées du mobile ont été mises en surbrillance et leurs étiquettes correspondent aux sommets ajoutés représentés par des carrés rouges. Dans cet exemple, l'arête racine est parallèle à $v^\bullet$; la racine du mobile est donc une arête diamantée donnée avec un côté et une orientation locale.

Définition 2.10 mobile unicellulaire généralisé étiqueté

Un **mobile unicellulaire généralisé étiqueté** est un couple $(\mathbf{u}, \mathbf{l})$ tel que

- ◇ $\mathbf{u}$ est une carte à une unique face enracinée ou enracinée sur une arête dont l'ensemble de sommets est partitionné en $V_\bullet(\mathbf{u}) \sqcup V_\circ(\mathbf{u})$ de telle sorte que chaque arête ait au moins une extrémité dans $V_\bullet(\mathbf{u})$;
- ◇ si $\mathbf{u}$ est enraciné, son sommet racine appartient à $V_\circ(\mathbf{u})$; si $\mathbf{u}$ est enracinée sur une arête, son arête racine appartient à l'ensemble $E_\bullet(\mathbf{u})$ des arêtes reliant deux sommets de $V_\bullet(\mathbf{u})$;
- ◇ $\mathbf{l} : V_\circ(\mathbf{u}) \sqcup E_\bullet(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbb{N}^*$ est une fonction de minimum 1.

Les arêtes de $E_\bullet(\mathbf{u})$ sont appelées *arêtes diamantées*. On définit l'*opération de dédiamantage* suivante sur l'ensemble des mobiles unicellulaires généralisés étiquetés. Étant donné un mobile unicellulaire

généralisé étiqueté, on divise chaque arête diamantée en deux arêtes en y ajoutant un sommet auquel on attribut l'étiquette de l'arête. Si la carte d'origine est enracinée sur une arête, alors on enracine la carte résultante au coin incident au sommet ajouté sur l'arête racine qui correspond au côté distingué de l'arête racine, orienté conformément à l'orientation de la racine de la carte d'origine. On obtient ainsi un mobile unicellulaire étiqueté.

Définition 2.11 $\Leftarrow$ *mobile unicellulaire généralisé bien étiqueté* $\Rightarrow$

Un mobile unicellulaire généralisé étiqueté est *bien étiqueté* si l'opération de dédiamantage en fait un mobile unicellulaire bien étiqueté et que les coins incidents aux sommets ajoutés pendant l'opération de dédiamantage ne sont les successeurs d'aucun coin.

Soit (u, l) un mobile unicellulaire généralisé bien étiqueté, soit $(\hat{u}, l)$ le mobile unicellulaire bien étiqueté obtenu par dédiamantage et soit $(\hat{m}, v^\bullet)$ la carte correspondant à $((\hat{u}, l), -)$. On considère un sommet $v \in V(\hat{u}) \setminus V(u)$. Il est de degré 2 dans $\hat{u}$ et, par définition, les deux coins incidents ne sont les successeurs d'aucun coin, donc il est également de degré 2 dans $\hat{m}$. Par conséquent, on peut définir la carte m obtenue en supprimant de $\hat{m}$ chaque sommet de $V(\hat{u}) \setminus V(u)$ et en fusionnant les deux arêtes incidentes en une seule. Notons que ni $v^\bullet$ ni le sommet racine de $\hat{m}$ ne sont supprimés, de sorte que la carte pointée $(m, v^\bullet)$ est bien définie. On étend alors la construction de la section 2.1.4.2 aux mobiles unicellulaires généralisés bien étiquetés en définissant l'image de $((u, l), -)$ comme $(m, v^\bullet)$ et, lorsque (u, l) n'est pas enraciné sur une arête, l'image de $((u, l), +)$ comme $(\bar{m}, v^\bullet)$.

On note $\mathcal{M}^\bullet$ l'ensemble des cartes pointées de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{M}_\parallel^\bullet$ le sous-ensemble des cartes pointées dont l'arête racine est parallèle au sommet distingué. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des mobiles unicellulaires généralisés bien étiquetés et $\mathcal{G}_\circ \subset \mathcal{G}$ le sous-ensemble des mobiles enracinés sur une arête. Si $(u, l) \in \mathcal{G}$, le *degré généralisé* d'un sommet de $V_\bullet(u)$ est défini comme le nombre d'arêtes non diamantées incidentes plus la moitié du nombre d'arêtes diamantées incidentes (comptées avec multiplicité).

Théorème 2.12 $\Leftarrow$ *bijection pour les cartes générales* [Bet22] $\Rightarrow$

Les constructions précédentes réalisent des bijections inverses l'une de l'autre entre $\mathcal{M}_\parallel^\bullet$ et $\mathcal{G}_\circ \times \{-\}$ d'une part, et entre $\mathcal{M}^\bullet \setminus \mathcal{M}_\parallel^\bullet$ et $(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_\circ) \times \{+, -\}$ d'autre part.

De plus, si $((u, l), \varepsilon)$ correspond à $(m, v^\bullet) \in \mathcal{M}^\bullet$, alors

- (i) $V(m) = V_\circ(u) \sqcup \{v^\bullet\}$ et, pour $v \in V_\circ(u)$, $l(v) = d_m(v, v^\bullet)$;
- (ii) $F(m)$ correspond à $V_\bullet(u)$: de plus, le degré d'une face de m est le double du degré généralisé du sommet vert correspondant ;
- (iii) les cartes m et u ont le même nombre d'arêtes.

On peut spécialiser la bijection en imposant une distribution de degrés pour les faces des cartes pointées ainsi que pour les degrés généralisés des sommets verts. En particulier, dans le cas des triangulations, les mobiles codant possèdent une structure simple : comme indiqué en fin de section 2.1.4.2, les contraintes d'étiquettes deviennent *locales*. L'argument utilisé pour dire que l'orientation des cycles de coins n'intervient pas dans la définition des mobiles codant dans le cas des quadrangulations fonctionne également pour les triangulations.

Voyons à quoi ressemble un mobile codant une triangulation. D'après le théorème 2.12, chaque sommet vert d'un mobile de $\mathcal{G}$ codant une triangulation est incident soit exactement à 3 arêtes diamantées, soit exactement à une arête non diamantée et une arête diamantée. De plus, les étiquettes autour d'un sommet vert ne peuvent être que des trois types représentés sur la figure 2.24. Cette structure simple permet d'utiliser des techniques de séries génératrices afin de retrouver le résultat d'énumération suivant ([Gao91, Theorem 1]).

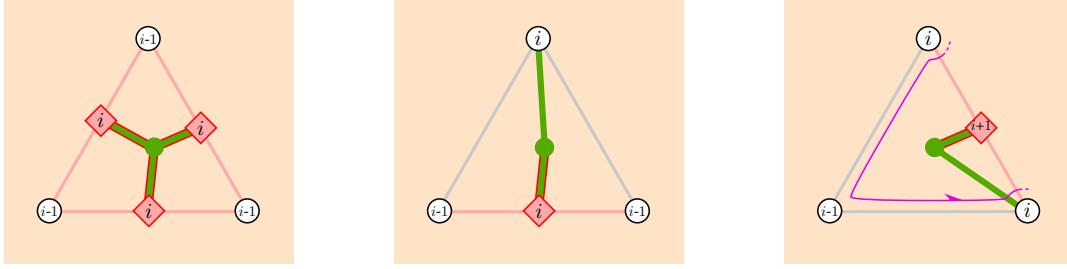


FIGURE 2.24. Les trois types de faces possibles dans une triangulation et les sommets verts correspondants.

Proposition 2.13 — nombre asymptotique de triangulations [Bet22] —

Soit S une surface orientable ou non. Le nombre de triangulations (enracinées) de S à $2n$ faces (et donc $3n$ arêtes et $n + 2 - 2h$ sommets, par la formule caractéristique d'Euler) est asymptotiquement équivalent à

$$c_S n^{5(h-1)/2} (12\sqrt{3})^n,$$

où h désigne le type de S et c_S est une constante qui dépend de S .

Les constantes c_S pour diverses S sont *universelles* dans le sens où elles apparaissent pour de nombreuses classes de cartes [Gao93] et peuvent être calculées par récursions non linéaires [BC86]. Leur série génératrice, une fois correctement mise à l'échelle, satisfait une EDO simple [GLM08, Car14]. Voir aussi [Cha19] donnant un lien intrigant avec les tailles de cellules de Voronoï des pavages d'une surface brownienne (dans le cas orientable). De notre bijection, nous obtenons pour c_S une formule impliquant une somme sur des cartes cubiques. Les valeurs pour $h \leq 1$ sont les suivantes.

<u>orientable</u>			<u>non orientable</u>		
h	S	c_S	h	S	c_S
0	sphère	$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{2}$	plan projectif	$\frac{2^{-3/4} 3^{5/4}}{\Gamma(3/4)}$
1	tore	$\frac{1}{8}$	1	bouteille de Klein	$\frac{3}{2}$

Pour les petites valeurs de h , la fonction génératrice des triangulations peut aussi être calculée explicitement : on retrouve [Gao91, Theorem 3] et on ajoute le cas de la bouteille de Klein.

Proposition 2.14 — fonction génératrice des triangulations [Bet22] —

La fonction génératrice des triangulations comptées avec poids x par sommet est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^3(1-\sigma)(1-4\sigma+2\sigma^2) & \quad \text{si } S \text{ est la sphère,} \\ \frac{1}{2}(1-2\sigma)(1-\sigma+\sigma^2) - \frac{1}{2}\sqrt{1-6\sigma+6\sigma^2} & \quad \text{si } S \text{ est le plan projectif,} \\ \frac{1}{2}\sigma(1-\sigma)(1-6\sigma+6\sigma^2)^{-2} & \quad \text{si } S \text{ est le tore,} \end{aligned}$$

$$3\sigma(1-\sigma)(1-6\sigma+6\sigma^2)^{-2}\left(7-30\sigma+30\sigma^2-6(1-2\sigma)\sqrt{1-6\sigma+6\sigma^2}\right)$$

si S est la bouteille de Klein, où σ est une fonction algébrique de x donnée par

$$x = \frac{1}{2}\sigma(1-\sigma)(1-2\sigma) \quad \sigma(0) = 0.$$

2.2 Construction des surfaces browniennes et méthodologie

Nous sommes maintenant en mesure de préciser la méthodologie utilisée pour les résultats du chapitre précédent. On peut voir les surfaces browniennes comme obtenues à partir de versions continues des bijections de la section précédente. On se focalisera en particulier sur les quadrangulations à bord de genre fixé. On rappelle qu'une telle carte possède des *faces externes* distinguées $h_1, \dots, h_p$ et que ses autres faces, appelées *faces internes*, sont toutes de degré 4. On rappelle également que, pour $g \geq 0$ fixé, $n \in \mathbb{N}$, et $\mathbf{l} = (l^1, \dots, l^p) \in (\mathbb{N}^*)^p$, on note $\mathbf{Q}_{n,\mathbf{l}}^{[g]}$ l'ensemble des quadrangulations *biparties* à bord de genre g , ayant p faces externes et n faces internes, telles que h_i soit de degré $2l^i$, pour $1 \leq i \leq p$.

2.2.1 Existence de limites

2.2.1.1 Codage des quadrangulations biparties à bord

Pour coder une carte de $\mathbf{Q}_{n,\mathbf{l}}^{[g]}$, nous utilisons donc la bijection de la section 2.1.3, que nous modifions légèrement afin de mieux prendre en compte les faces externes. Tous les sommets verts correspondants aux faces internes sont de degré 2, nous les supprimons. Ensuite, pour $1 \leq i \leq p$, le sommet vert correspondant à h_i , qui est de degré l^i , est remplacé par une face de degré l^i , notée également h_i , comme illustré à gauche de la figure 2.25. Ces faces seront représentées en violet sur les figures. On obtient ainsi une carte étiquetée de genre g à une face interne et p faces externes $h_1, \dots, h_p$.

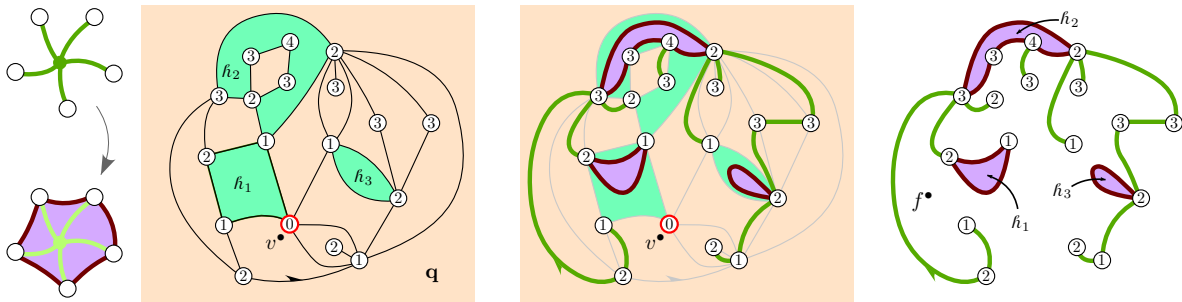


FIGURE 2.25. La construction modifiée pour une carte de $\mathbf{Q}_{12,(2,4,1)}^{[0]}$. On conserve des faces externes plutôt que des sommets verts.

Il convient de décomposer la carte étiquetée $(\mathbf{u}, \mathbf{l})$ obtenue. Soit $\tilde{\mathbf{u}}$ la carte non enracinée obtenue à partir de $\mathbf{u}$ en supprimant itérativement tous ses sommets de degré 1. La carte $\tilde{\mathbf{u}}$ peut donc être vue comme une sous-carte de $\mathbf{u}$, au sens où $\mathbf{u}$ est obtenue à partir de $\tilde{\mathbf{u}}$ en ajoutant des arbres étiquetés à chacun de ses coins. Les *nœuds* de $\mathbf{u}$ sont les sommets qui n'ont pas été supprimés et dont le degré dans $\tilde{\mathbf{u}}$ est 3 ou plus. Ils sont reliés dans $\tilde{\mathbf{u}}$ par des chaînes d'arêtes; remplacer chacune de ces chaînes par une arête donne une carte $\mathbf{s}$ ayant une face interne et p faces externes appelée *schéma* de $\mathbf{u}$. Une

telle carte est visible sur la figure 1.14. Le schéma s est enraciné selon une convention qui sera décrite ultérieurement.

Remarque 2.15 ➤ cas de la sphère et du disque ➤

Le cas de la sphère est dégénéré dans la mesure où la carte u est un arbre; il n'y a donc pas de schéma dans ce cas. Nous écartons ce cas particulier.

Le cas du disque est également particulier car la carte $\tilde{u}$ n'a que des sommets de degrés 2. Il est possible de faire rentrer ce cas dans le cadre présenté ici en convenant que le schéma est une carte à une unique arête, formant une boucle séparant la face interne de la face externe.

On note $\vec{E}(s)$ l'ensemble des demi-arêtes incidentes à la face interne de s ; cet ensemble est partitionné en l'ensemble $\vec{I}(s)$ des demi-arêtes dont l'inverse appartient également à $\vec{E}(s)$ et l'ensemble $\vec{B}(s)$ des demi-arêtes dont l'inverse n'appartient pas à $\vec{E}(s)$, c'est-à-dire est incidente à un trou. On considère $e \in \vec{E}(s)$: elle correspond à une chaîne $e_1, \dots, e_k$ de demi-arêtes dans u . Pour $1 \leq i \leq k$, on note c_i le coin de $\tilde{u}$ précédant e_i dans l'ordre du contour. La collection d'arbres étiquetés enracinés correspondant aux coins $c_1, \dots, c_k$, auxquels on ajoute le sommet e_k^+ , forme une forêt étiquetée⁷, que l'on note (f^e, l^e) . On enracine s en la demi-arête e telle que la forêt (f^e, l^e) contienne la racine de la carte originale u . La *pièce élémentaire* de (u, l) correspondant à e est (voir la figure 2.26)

- ♦ soit la forêt étiquetée (f^e, l^e) si $e \in \vec{B}(s)$,
- ♦ soit le couple $((f^e, l^e), (f^{\bar{e}}, l^{\bar{e}}))$ si $e \in \vec{I}(s)$, où $\bar{e}$ désigne l'inverse de e .

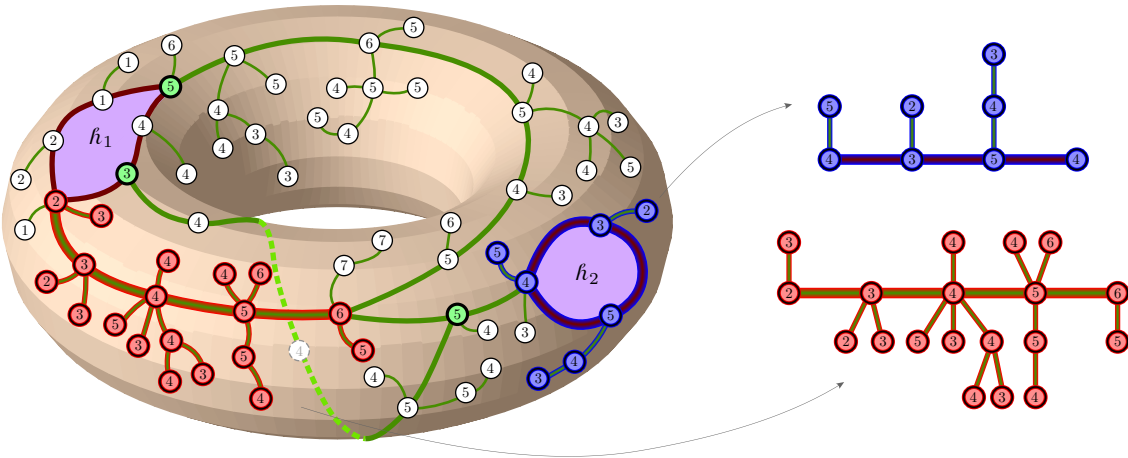


FIGURE 2.26. Décomposition de (u, l) en pièces élémentaires. Les arêtes de $\tilde{u}$ sont plus épaisses et les nœuds ont un contour plus épais. Deux pièces élémentaires sont extraites. La racine n'est pas représentée. Par exemple, la forêt (en bleu) correspondant à l'arête e dont l'inverse $\bar{e}$ est incidente à h_2 , contient $h^e = 3$ arbres (on rappelle que le sommet le plus à droite ne compte pas comme un arbre) et $a^e = 4$ arêtes; les étiquettes translatées de son plancher forment le pont $B^e = (0, -1, 1, 0)$ et la fonction d'étiquetage translatée arbre par arbre assigne les étiquettes, de bas en haut, 0, 1 au premier arbre, 0, -1 au second arbre et 0, -1, -2 au troisième, et 0 au dernier sommet.

Partant d'une carte pointée de $\mathbf{Q}_{n,l}^{[g]}$, on obtient un schéma s et une collection de pièces élémentaires, sur lesquelles nous reviendrons ultérieurement. Pour l'instant, nous nous intéressons plutôt aux forêts étiquetées obtenues. On rappelle que le *plancher* d'une forêt est l'ensemble des sommets racines de

7. Dans ce document, les forêts comporteront systématiquement un dernier sommet ne comptant pas comme un arbre mais muni d'une étiquette lorsque la forêt est étiquetée.

ses arbres. Pour une demi-arête $e \in \vec{E}(s)$, on note $B^e(0), B^e(1), \dots$ la suite des étiquettes du plancher de f^e , translâtées afin de commencer à 0. On note également l_0^e la fonction d'étiquettes sur f^e obtenue en translâtant l^e arbre par arbre de sorte que les étiquettes du plancher soient toutes nulles.

La forêt étiquetée (f^e, l_0^e) est codée par un couple de fonctions (X^e, Z^e) , défini comme suit. Notant a^e le nombre d'arêtes de f^e et h^e son nombre d'arbres, on peut voir f^e comme une carte plane à une face ayant $a^e + h^e$ arêtes en reliant les sommets du plancher comme sur la figure 2.26. Soit alors $f^e(0), f^e(1), \dots, f^e(2a^e + h^e)$ les sommets de f^e lus selon le contour de la face de cette carte, en commençant au premier coin du premier arbre. La *fonction de contour* $X^e : [0, 2a^e + h^e] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la *fonction d'étiquetage* $Z^e : [0, 2a^e + h^e] \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par

$$X^e(i) := d_{f^e}(f^e(i), f^e(2a^e + h^e)) \quad \text{et} \quad Z^e(i) := l_0^e(f^e(i)), \quad 0 \leq i \leq 2a^e + h^e,$$

et par interpolation linéaire entre ces valeurs; voir la figure 2.27.

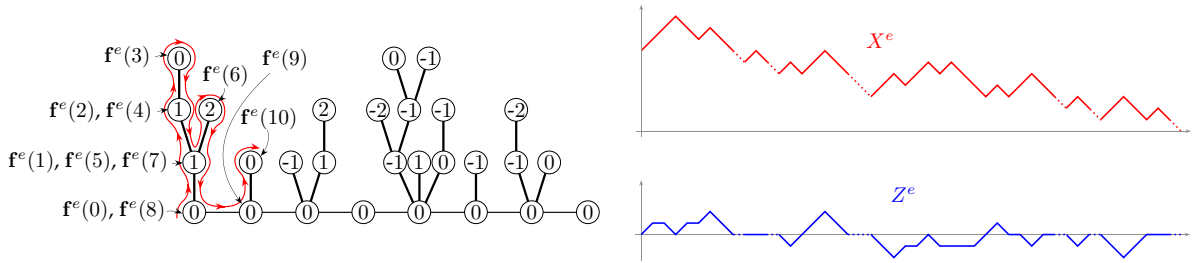


FIGURE 2.27. Les fonctions de contour et d'étiquetage d'une forêt étiquetée à 7 arbres (on rappelle qu'il y a un arbre sommet à la fin que l'on ne compte pas) et 20 arêtes. À droite, les chemins sont en pointillés sur les intervalles correspondant aux arêtes du plancher.

La représentation, dite *serpent*, de la figure 2.28 permet de bien visualiser les choses. L'axe des i représente le temps; sur l'axe des j , on représente la fonction de contour X^e . Ensuite, à i fixé, on représente en fonction de j sur l'axe vertical les étiquettes de toute la lignée généalogique du sommet $f^e(i)$ à partir du sommet le plus à droite de la forêt. Sur la figure 2.27 par exemple, les étiquettes de la lignée généalogique de $f^e(6)$ sont 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2.

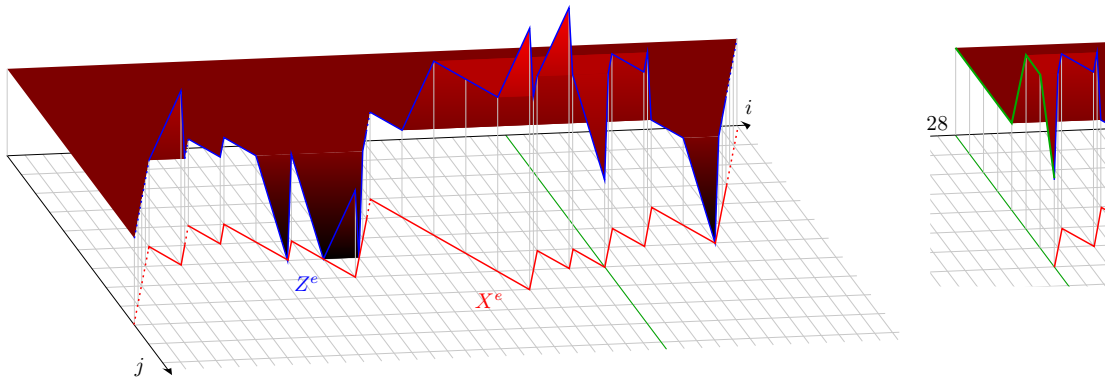


FIGURE 2.28. Représentation serpent d'une forêt étiquetée (différente de celle de la figure 2.27). À droite, on peut par exemple lire que les étiquettes de la lignée généalogique de $f^e(28)$ sont 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0.

On étend également la suite B^e enregistraant les étiquettes translâtées du plancher de (f^e, l^e) en une

fonction $B^e : [0, h^e] \rightarrow \mathbb{R}$ par interpolation linéaire entre les valeurs entières. On utilisera la notation

$$\underline{Y}(s) := \inf_{0 \leq t \leq s} Y(t)$$

pour le minimum passé d'un processus Y . Ainsi, notant ρ^e le sommet racine du premier arbre de $\mathbf{f}^e$, on retrouve les étiquettes originales par la formule

$$\ell^e(\mathbf{f}^e(i)) = \ell^e(\rho^e) + Z^e(i) + B^e(h^e - \underline{X}^e(i)), \quad 0 \leq i \leq 2a^e + h^e. \quad (2.2)$$

2.2.1.2 Limite d'échelle du codage

On rappelle qu'un *pont brownien* de longueur H de a à b est un mouvement brownien standard sur $[0, H]$ issu de a , et conditionné à être en b au temps H , et qu'un *pont brownien de premier passage* de longueur A de a à $b < a$ est un mouvement brownien standard sur $[0, A]$ issu de a , et conditionné à atteindre b pour la première fois à l'instant A (voir par exemple [Bil68, RY99, BCP03, Bet10]). La *tête du serpent brownien* dirigée par un processus $X \in \mathcal{C}([0, x], \mathbb{R})$ peut être définie comme le processus $(X(s), Z(s))_{0 \leq s \leq x}$, où, conditionnellement à X , le processus Z est un processus gaussien centré de covariance

$$\text{Cov}(Z(s), Z(s')) = \inf_{s \wedge s' \leq t \leq s \vee s'} (X(t) - \underline{X}(t)).$$

Nous référons à [LG99, DLG02] pour plus de détails sur ce processus. Une représentation plus visuelle de ce processus consiste à considérer le *serpent brownien* entier qui est un processus prenant ses valeurs dans l'ensemble des fonctions continues sur un segment de longueur variable et dont la *tête* est la valeur finale. Intuitivement, à l'instant 0, le processus est la fonction nulle sur $[0, X(0)]$. Ensuite, lorsque X décroît, on « efface » les valeurs finales et, lorsque X croît, on « ajoute » un bout de mouvement brownien indépendant du reste; voir la figure 2.29.

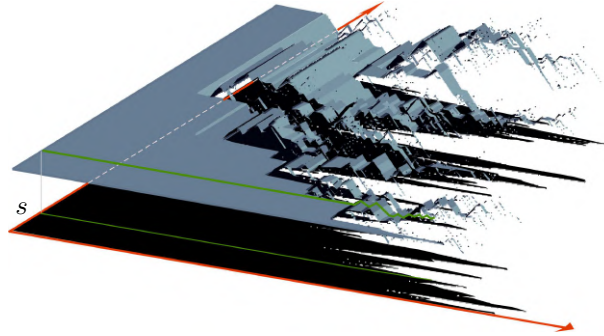


FIGURE 2.29. Une approximation du serpent brownien dirigé par un pont de premier passage. Le pont de premier passage est représenté par l'ombre. Pour voir la fonction donnant la valeur du serpent à un temps donné s , il faut couper la surface et regarder le bord (en vert) de la pièce coupée, comme sur la figure 2.28.

On se place dans le cadre du théorème 1.13. On fixe $(g, p) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^p) \in (0, \infty)^p$, une suite $\mathbf{l}_n = (l_n^1, \dots, l_n^p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ de p -uplets tels que

$$l_{(n)}^i := \frac{l_n^i}{\sqrt{2n}} \rightarrow L^i, \quad 1 \leq i \leq p,$$

et on considère une carte aléatoire $\mathbf{q}_n$ uniformément distribuée parmi $\mathbf{Q}_{n, \mathbf{l}_n}^{[g]}$. Conditionnellement à $\mathbf{q}_n$, on choisit un sommet $v_n^\bullet \in V(\mathbf{q}_n)$ uniformément au hasard, ce qui nous donne une quadrangulation bipartie à bord pointée $(\mathbf{q}_n, v_n^\bullet)$, que l'on code à l'aide du codage de la section précédente. On note $\mathbf{s}_n$

le schéma obtenu et, pour toute $e \in \vec{\mathbb{E}}(s_n)$, on note $a_n^e, h_n^e, X_n^e, Z_n^e, B_n^e$, respectivement le nombre d'arêtes, le nombre d'arbres, la fonction de contour, la fonction d'étiquetage, la fonction enregistrant les étiquettes translatées du plancher, de la forêt étiquetée indexée par e . Pour $v \in V(s_n)$, on note par ailleurs λ_n^v l'étiquette du nœud correspondant à v dans la carte codante. On définit les versions renormalisées de ces objets par

$$a_{(n)}^e := \frac{2a_n^e + h_n^e}{2n}, \quad h_{(n)}^e := \frac{h_n^e}{\sqrt{2n}}, \quad \lambda_{(n)}^v := \frac{\lambda_n^v}{(8n/9)^{1/4}},$$

$$X_{(n)}^e := \left(\frac{X_n^e(2ns)}{\sqrt{2n}} \right)_{0 \leq s \leq a_{(n)}^e}, \quad Z_{(n)}^e := \left(\frac{Z_n^e(2ns)}{(8n/9)^{1/4}} \right)_{0 \leq s \leq a_{(n)}^e}, \quad B_{(n)}^e := \left(\frac{B_n^e(\sqrt{2n}s)}{(8n/9)^{1/4}} \right)_{0 \leq s \leq h_{(n)}^e}.$$

Pour la convergence des fonctions ci-dessus, on travaille sur l'ensemble

$$\mathcal{C} := \bigsqcup_{I \text{ fermé}} \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \quad (2.3)$$

des fonctions continues définies sur un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, muni de la distance

$$\text{dist}_{\mathcal{C}}(f, g) := |\sigma(f) - \sigma(g)| + |\tau(f) - \tau(g)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(\sigma(f) \vee t \wedge \tau(f)) - g(\sigma(g) \vee t \wedge \tau(g))|$$

où, pour une fonction $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, on note $\sigma(f) := \inf(I)$ et $\tau(f) := \sup(I)$ les extrémités de son intervalle de définition.

Proposition 2.16 $\Leftarrow$ *convergence du codage* [Bet16a] $\Rightarrow$

Le vecteur aléatoire

$$\left(s_n, (a_{(n)}^e)_{e \in \vec{\mathbb{E}}(s_n)}, (h_{(n)}^e)_{e \in \vec{\mathbb{E}}(s_n)}, (\lambda_{(n)}^v)_{v \in V(s_n)}, (X_{(n)}^e, Z_{(n)}^e)_{e \in \vec{\mathbb{E}}(s_n)}, (B_{(n)}^e)_{e \in \vec{\mathbb{E}}(s_n)} \right)$$

converge en loi vers un vecteur aléatoire

$$\left(\mathbf{S}, (A^e)_{e \in \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{S})}, (H^e)_{e \in \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{S})}, (\Lambda^v)_{v \in V(\mathbf{S})}, (X^e, Z^e)_{e \in \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{S})}, (B^e)_{e \in \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{S})} \right)$$

dont la loi vérifie en particulier que, conditionnellement aux quatre premières coordonnées,

- ◇ le processus (X^e, Z^e) a la loi d'une tête de serpent brownien dirigée par un pont brownien de premier passage de longueur A^e de H^e à 0,
- ◇ le processus B^e a la loi d'un pont brownien de longueur H^e de 0 à $\Lambda^{e^+} - \Lambda^{e^-}$, où l'on note e^- et e^+ l'origine et la cible de e , multiplié par

$$\kappa^e := \begin{cases} 1 & \text{si } e \in \vec{\mathbb{I}}(\mathbf{S}) \\ \sqrt{3} & \text{si } e \in \vec{\mathbb{B}}(\mathbf{S}) \end{cases}.$$

Notons que la formule d'Euler implique que la condition sur le degré d'un sommet d'un schéma (supérieur ou égal à 3) fait que les schémas de genre g à p trous sont en nombre fini et $\mathbf{S}$ est donc une variable à valeurs dans un ensemble fini. De plus, la loi limite ne charge que les schémas *dominants*, c'est-à-dire dont les sommets sont tous de degré exactement 3. De façon équivalente, ce sont ceux qui maximisent le cardinal de $\vec{\mathbb{E}}$ (égal à $6g + 3p - 3$ dans ce cas). Cela implique en outre que chaque sommet d'un schéma dominant est incident à au plus un trou. En particulier, les trous d'un schéma dominant sont bien « séparés » au sens où leurs bords sont des boucles simples deux à deux disjointes. Par ailleurs, en dehors des relations évidentes $B^e(s) = B^e(H^e - s)$, $0 \leq s \leq H^e = H^e$ lorsque $e \in \vec{\mathbb{I}}(\mathbf{S})$, les processus (X^e, Z^e) , $e \in \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{S})$ et B^e , $e \in \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{S})$, sont indépendants.

Le facteur κ^e provient du fait que les variations d'étiquettes le long des demi-arêtes de $\vec{B}$ ont une plus grande variance que celles le long des demi-arêtes de $\vec{I}$. Ce facteur d'apparence inoffensif cause diverses difficultés techniques. Très grossièrement, une fois fixées les quatre premières coordonnées du vecteur discret, les forêts étiquetées et les ponts d'étiquettes de planchers sont uniformes. Les fonctions X_n^e et B_n^e forment donc des marches aléatoires conditionnées (la première à pas uniformes dans $\{-1, 1\}$, la seconde à pas uniformes dans $\{-1, 0, 1\}$ si $e \in \vec{I}$) et des versions conditionnées du théorème de Donsker permettent d'obtenir leurs limites d'échelle. Notons que l'échelle de temps de X_n^e est $2n$, son échelle d'espace est donc $\sqrt{2n}$. L'échelle de temps de B_n^e est donc $\sqrt{2n}$ et son échelle d'espace devient $\sqrt{2/3}\sqrt{\sqrt{2n}} = (8n/9)^{1/4}$ si $e \in \vec{I}$, le terme $\sqrt{2/3}$ étant la variance d'un pas uniforme dans $\{-1, 0, 1\}$. Pour B_n^e dans le cas où $e \in \vec{B}$, les pas sont à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ et ont pour variance $\sqrt{2}$, ce qui donne une échelle d'espace $\sqrt{3}(8n/9)^{1/4}$. Enfin, pour Z_n^e , on imagine sur les branches de la forêt, donc de longueur dans l'échelle $\sqrt{2n}$, des marches aléatoires de pas uniformes dans $\{-1, 0, 1\}$, ce qui donne une échelle d'espace $(8n/9)^{1/4}$ et un serpent brownien à la limite.

2.2.1.3 Carte codante continue

On reconstruit maintenant la structure continue $\mathcal{M}$ correspondant à la carte à une face interne codante. On a décomposé cette dernière en une collection de forêts étiquetées indexées par un schéma afin d'obtenir une limite d'échelle. Il s'agit dorénavant de « recoller » les objets limites selon le schéma limite.

Soit $e^{[1]}, \dots, e^{[|\vec{E}(\mathbf{S})|]}$ les demi-arêtes de $\vec{E}(\mathbf{S})$ arrangées selon l'ordre de contour de la face interne de $\mathbf{S}$, en commençant à la racine. Pour $s \in [0, 1]$, il existe un unique $k \in \{1, \dots, |\vec{E}(\mathbf{S})|\}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k-1} A^{e^{[i]}} \leq s < \sum_{i=1}^k A^{e^{[i]}}.$$

Soit $e_s := e^{[k]}$ et $\langle s \rangle := s - \sum_{i=1}^{k-1} A^{e^{[i]}} \in [0, A^{e_s})$. Par convention, on pose $e_1 = e^{[1]}$ et $\langle 1 \rangle = 0$. On définit la relation $\simeq$ sur $[0, 1]$ comme la relation d'équivalence la plus grossière pour laquelle $s \simeq t$ si l'un des événements suivants se produit :

$$e_s = e_t \quad \text{et} \quad X^{e_s} \langle s \rangle = X^{e_t} \langle t \rangle = \inf_{[\langle s \rangle \wedge \langle t \rangle, \langle s \rangle \vee \langle t \rangle]} X^{e_s}; \quad (2.4a)$$

$$e_s = \bar{e}_t, \quad X^{e_s} \langle s \rangle = \underline{X}^{e_s} \langle s \rangle, \quad X^{e_t} \langle t \rangle = \underline{X}^{e_t} \langle t \rangle \quad \text{et} \quad X^{e_s} \langle s \rangle = H^{e_t} - X^{e_t} \langle t \rangle. \quad (2.4b)$$

où l'on écrit $X^{e_s} \langle s \rangle$ au lieu de $X^{e_s}(\langle s \rangle)$. L'équation (2.4a) identifie les nombres codant le même point dans l'une des forêts, l'équation (2.4b) identifie les planchers de forêts « se faisant face » : les nombres s et t doivent coder des points du plancher (deuxième et troisième égalités) de forêts se faisant face (première égalité) et correspondre au même point (quatrième égalité). On pose $\mathcal{M} := [0, 1]_{\simeq}$ et, pour $s, t \in [0, 1]$, on note $\mathcal{M}(s)$ la classe d'équivalence de s dans le quotient et $\mathcal{M}([s, t]) := \{\mathcal{M}(r) : r \in [s, t]\}$.

La *colonne vertébrale* de $\mathcal{M}$ mentionnée dans la section 1.5.1 est l'union des planchers des forêts continues, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{M}(\{s : X^{e_s} \langle s \rangle = \underline{X}^{e_s} \langle s \rangle\}).$$

On attribue ensuite des « étiquettes continues » aux points de $\mathcal{M}$. L'observation (2.2) nous amène à définir la fonction continue

$$\mathfrak{L} : s \in [0, 1] \mapsto \Lambda^{e_s^-} + Z^{e_s} \langle s \rangle + B^{e_s} (H^{e_s} - \underline{X}^{e_s} \langle s \rangle).$$

Lemme 2.17 $\Leftarrow$ *minimum de $\mathfrak{L}$* [Bet16a] $\Rightarrow$

Presque sûrement, le minimum de $\mathfrak{L}$ est 0 ; celui-ci est atteint en un unique point $s^\bullet$.

On peut montrer que $s \simeq t$ implique $\mathfrak{L}(s) = \mathfrak{L}(t)$ et on peut donc voir $\mathfrak{L}$ comme une fonction sur $\mathcal{M}$ en posant $\mathfrak{L}(\mathcal{M}(s)) := \mathfrak{L}(s)$.

On a donc une version continue $\mathcal{M}$ de carte à une face interne et p trous, dont les points sont étiquetés par $\mathfrak{L}$. Nous allons opérer une version continue de la bijection de codage inverse ; la limite d'échelle fait que l'ajout d'arêtes reliant les coins à leurs successeurs dans la bijection discrète deviendra, dans le cas continu, une identification de points.

2.2.1.4 Convergence de l'espace métrique à extraction près

La convergence à extraction près du théorème 1.12 s'obtient par la méthode de l'article pionnier de Jean-François Le Gall [LG07]. On note $|\mathbf{l}_n| := l_n^1 + \dots + l_n^p$ et $c_0, c_1, \dots, c_{2n+|\mathbf{l}_n|}$ les coins de la face interne de la carte étiquetée $(\mathbf{u}_n, \mathbf{l}_n)$ codant $(\mathbf{q}_n, v_n^\bullet)$, arrangés selon l'ordre de contour, en commençant par la racine. Notant $\mathbf{q}_n(0), \dots, \mathbf{q}_n(2n+|\mathbf{l}_n|)$ les sommets correspondant de $\mathbf{q}_n$, cela donne un parcours surjectif (mais pas du tout injectif) des sommets de $V(\mathbf{q}_n) \setminus \{v_n^\bullet\}$.

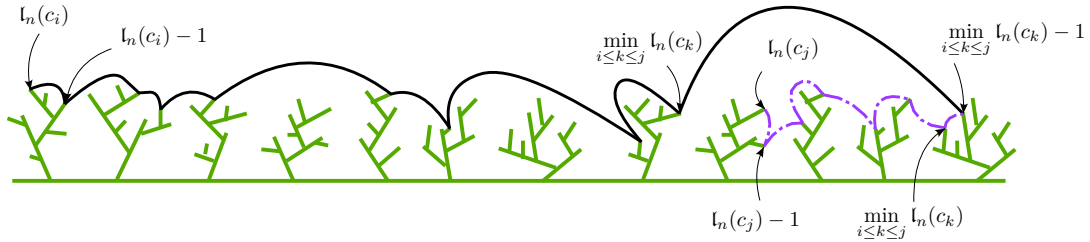
On munit l'ensemble $[0, 1]$ de la pseudo-distance⁸ $d_{(n)}$ définie par

$$d_{(n)}(s, t) := \left(\frac{9}{8n} \right)^{1/4} d_{\mathbf{q}_n}(\mathbf{q}_n((2n+|\mathbf{l}_n|)s), \mathbf{q}_n((2n+|\mathbf{l}_n|)t)), \quad s, t \in \left\{ 0, \frac{1}{2n+|\mathbf{l}_n|}, \dots, 1 \right\},$$

et par interpolation linéaire entre ces valeurs. Il est facile de voir que l'espace métrique $[0, 1]_{/\{d_{(n)}=0\}}$ muni de la distance quotient est proche, au sens de Gromov–Hausdorff, de $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n$. Ensuite, on utilise la borne

$$d_{\mathbf{q}_n}(\mathbf{q}_n(i), \mathbf{q}_n(j)) \leq l_n(c_i) + l_n(c_j) - 2 \min_{i \leq k \leq j} l_n(c_k) + 2, \quad i \leq j,$$

illustrée ci-dessous



et obtenue en observant que l'on peut créer un chemin entre $\mathbf{q}_n(i)$ et $\mathbf{q}_n(j)$ dans $\mathbf{q}_n$ en suivant les arêtes reliant les successeurs itérés de c_i et c_j jusqu'à leur successeur commun⁹, dont l'étiquette est $\min_{i \leq k \leq j} l_n(c_k) - 1$. En inversant également les rôles de i et j , on borne ainsi la pseudo-distance $d_{(n)}$ par une fonction explicite de l_n , qui converge, grâce à la proposition 2.16, vers le processus

$$D_{\mathfrak{L}}(s, t) := \mathfrak{L}(s) + \mathfrak{L}(t) - 2 \max \left(\min_{[s \wedge t, s \vee t]} \mathfrak{L}, \min_{[s \vee t, 1] \cup [0, s \wedge t]} \mathfrak{L} \right), \quad s, t \in [0, 1]. \quad (2.5)$$

Cela implique¹⁰ que $d_{(n)}$ converge vers une pseudo-distance D , selon une sous-suite, la convergence étant jointe avec celle de la proposition 2.16. Cela implique assez facilement la convergence,

8. On rappelle qu'une *pseudo-distance* est une fonction de deux variables, symétrique, nulle sur la diagonale, et qui vérifie l'inégalité triangulaire.

9. Il est question des successeurs de l'étape 2, définis à la définition 2.2.

10. Voir le lemme 19 dans [Bet10].

selon la sous-suite extraite, de $(8n/9)^{-1/4} \mathbf{q}_n$ vers l'espace métrique $\text{BS}_L^g := [0, 1]_{\{D=0\}}$ muni de la distance quotient, que l'on note encore D .

Fixons une telle extraction et notons (BS_L^g, D) l'espace métrique limite, qui dépend a priori de l'extraction choisie. On note aussi $\text{BS}_L^g(s)$ la classe d'équivalence de $s \in [0, 1]$ dans BS_L^g . Le fait trivial que $d_{(n)}(s, t) = 0$ lorsque $(2n + |\mathbf{l}_n|)s$ et $(2n + |\mathbf{l}_n|)t$ codent le même sommet de la carte codant $(\mathbf{q}_n, v_n^\bullet)$ passe facilement à la limite dans le sens où $\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}(t)$ implique $\text{BS}_L^g(s) = \text{BS}_L^g(t)$. On peut donc définir une pseudo-distance, que l'on note encore par D , et une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{M}$ en posant $D(\mathcal{M}(s), \mathcal{M}(t)) := D(s, t)$ et en déclarant $\mathcal{M}(s) \sim \mathcal{M}(t)$ si $\text{BS}_L^g(s) = \text{BS}_L^g(t)$, c'est-à-dire si $D(s, t) = 0$. Cela permet de voir BS_L^g comme un quotient de $\mathcal{M}$: plus précisément, l'espace métrique (BS_L^g, D) est isométrique à $(\mathcal{M}/\sim, D)$.

On rappelle que $s^\bullet$ est l'argmin de $\mathfrak{L}$ et on note $x^\bullet := \text{BS}_L^g(s^\bullet)$ le point correspondant dans BS_L^g , que l'on peut voir comme l'analogue continu de $v_n^\bullet$. Le fait que les étiquettes représentent les distances à $v_n^\bullet$ dans $\mathbf{q}_n$ passe à la limite en donnant que

$$D(s, s^\bullet) = \mathfrak{L}(s).$$

Proposition 2.18 *identification des points* [\[Bet16a\]](#)

Soient $a = \mathcal{M}(s)$ et $b = \mathcal{M}(t)$ deux points distincts de $\mathcal{M}$. Alors $a \sim b$ si et seulement si

$$\mathfrak{L}(a) = \mathfrak{L}(b) \geq \mathfrak{L}(c)$$

soit pour tout $c \in \mathcal{M}([s \wedge t, s \vee t])$, soit pour tout $c \in \mathcal{M}([s \vee t, 1] \cup [0, s \wedge t])$.

On obtient ainsi la surface brownienne en identifiant les points de même étiquette tels que tous les points situés entre eux en suivant le contour ont des étiquettes plus grandes que leur étiquette commune. Il y a deux manières possibles de suivre le contour entre deux points a et b , soit de a à b , soit de b à a , ce qui explique la présence des deux ensembles dans la proposition précédente. On peut voir cela comme la version continue du fait de relier soit a à b , soit b à a .

Un point crucial est le fait que le quotient $[0, 1]_{\{D=0\}}$ ne dépend en fait pas de l'extraction. En effet, on peut reformuler la proposition précédente en disant que $D(s, t) = 0$ équivaut à $s \simeq t$ ou $D_{\mathfrak{L}}(s, t) = 0$, où la fonction $D_{\mathfrak{L}}$, définie par (2.5), ne dépend pas de l'extraction.

2.2.2 Unicité de la limite

Afin de se passer de l'extraction de la section précédente, il s'agit d'identifier la distance D . Cette étape très compliquée a été franchie dans le cas de la sphère par Jean-François Le Gall [\[LG13\]](#) et Grégory Miermont [\[Mie13\]](#). Plutôt que de tenter d'adapter l'une de ces méthodes au cadre que l'on considère dans ce manuscrit, nous utilisons avec Grégory Miermont [\[BM17, BM22\]](#) une approche qui consiste à déduire le cas qui nous intéresse du cas planaire via des « opérations chirurgicales ». Très grossièrement, on découpe nos surfaces en pièces élémentaires de topologie plane pour lesquelles on obtient des limites d'échelle à partir de la limite d'échelle des cartes planes. Ensuite, il ne reste plus qu'à recoller les morceaux...

Sur un ensemble $\mathcal{X}$ muni d'une pseudo-distance d et d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, on définit le collage de $(\mathcal{X}, d)$ selon $\mathcal{R}$ comme suit. D'après [\[BBI01, Theorem 3.1.17\]](#), la pseudo-distance définie par

$$d_{/\mathcal{R}}(x, y) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^k d(x_i, y_i) : \begin{array}{l} k \geq 1, x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{X}, x_1 = x, y_k = y \\ y_i \mathcal{R} x_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \dots, k-1\} \end{array} \right\}, \quad x, y \in \mathcal{X}, \quad (2.6)$$

est la plus grande pseudo-distance sur $\mathcal{X}$ qui vérifie $d_{/\mathcal{R}} \leq d$ et $d_{/\mathcal{R}}(x, y) = 0$ dès que $x\mathcal{R}y$. Intuitivement, pour aller d'un point x à un point y , on peut utiliser des « raccourcis » donnés par les identifications faites par $\mathcal{R}$. Notons que l'ensemble $\{d_{/\mathcal{R}} = 0\}$ fournit une relation d'équivalence sur $\mathcal{X}$ qui contient $\mathcal{R}$, mais que cette inclusion peut éventuellement être stricte. Le *collage de $(\mathcal{X}, d)$ selon $\mathcal{R}$* est l'espace métrique $(\mathcal{X}, d)_{/\mathcal{R}} := (\mathcal{X}_{/\{d_{/\mathcal{R}}=0\}}, d_{/\mathcal{R}})$.

Le but de ce que nous présentons maintenant est d'obtenir que $D = (D_{\mathfrak{L}})_{/\simeq}$, c'est-à-dire que la surface brownienne de genre g et périmètre L est $\text{BS}_{\mathfrak{L}}^g = ([0, 1], D_{\mathfrak{L}})_{/\simeq}$.

2.2.2.1 Découpage des quadrangulations

On reprend le codage des quadrangulations biparties à bord de la section 2.2.1.1. On introduit une version *par intervalles* de la construction passant des cartes codantes aux cartes codées. Dans la carte étiquetée $(\mathbf{u}, \mathfrak{l})$, on considère une suite (un *intervalle*) de coins consécutifs $I = \{c_0, c_1, \dots, c_r\}$ de la face de $\mathbf{u}$. À la place de l'*étape 1* où l'on ajoutait un sommet d'étiquette nulle, on ajoute dorénavant p sommets $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+p}$, où $p := \mathfrak{l}(c_r) - \min_{0 \leq i \leq r} \mathfrak{l}(c_i) + 1$, auxquels on assigne les étiquettes $\mathfrak{l}(v_{r+i}) := \mathfrak{l}(c_r) - i$, $1 \leq i \leq r$ et on note c_{r+i} le coin incident à v_{r+i} , pour $1 \leq i \leq r$. À la place de l'*étape 2*, on relie chaque coin de $\{c_0, c_1, \dots, c_{r+p-1}\}$ à son successeur, défini comme le premier coin, dans l'ordre $c_0, c_1, \dots, c_{r+p}$, d'étiquette strictement inférieure. Deux chaînes particulières d'arêtes apparaissent dans cette construction : la *navette*, reliant $c_r, c_{r+1}, \dots, c_{r+p}$, et la *géodésique maximale*, reliant c_0 à ses successeurs itérés jusqu'à c_{r+p} . On vérifie aisément que ces deux chaînes forment des géodésiques.

Reprenant les notations de la section 2.2.1.1, on note I_e l'intervalle de coins de $\mathbf{u}$ correspondant à la forêt $\mathbf{f}^e$. Deux tels intervalles partagent au plus une extrémité et $\bigcup_{e \in \vec{\mathbf{B}}(\mathbf{s})} I_e$ donne l'ensemble des coins de la face interne de $\mathbf{u}$. Plus précisément, si l'on retire le dernier coin de chaque intervalle, on obtient une partition des coins de la face interne de $\mathbf{u}$. La construction, illustrée sur la figure 2.30, avec les intervalles $I_e, e \in \vec{\mathbf{B}}(\mathbf{s})$ donne une décomposition naturelle de la quadrangulation originale en sous-cartes que l'on appelle *pièces élémentaires* et qui correspondent aux pièces élémentaires de $(\mathbf{u}, \mathfrak{l})$ définies lors de la section 2.2.1.1. On appelle *tranches composites* les pièces élémentaires correspondant aux demi-arêtes de $\vec{\mathbf{B}}(\mathbf{s})$, et *quadrilatères à bords géodésiques* celles correspondant aux demi-arêtes de $\vec{\mathbf{I}}(\mathbf{s})$. Ces cartes ne sont pas enracinées mais plutôt définies avec un marquage sur le bord.

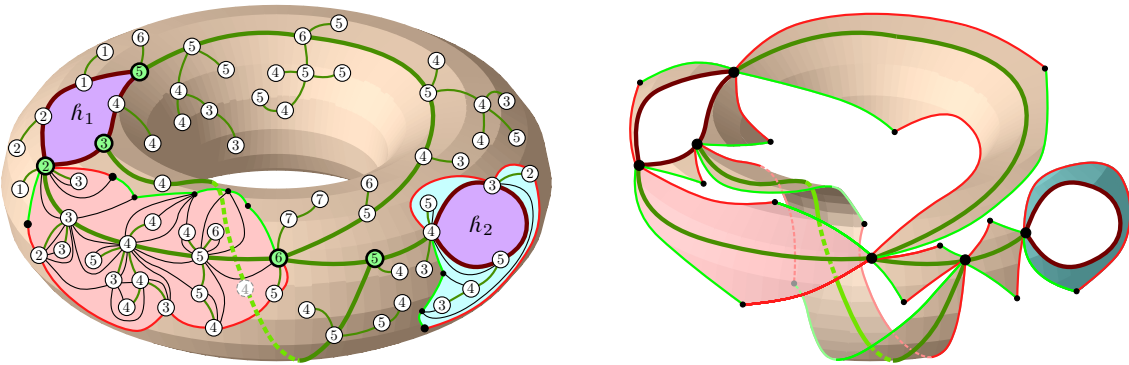


FIGURE 2.30. La construction par intervalles donne une décomposition en pièces élémentaires. À gauche, la carte étiquetée de la figure 2.26 et les deux pièces élémentaires de la quadrangulation correspondant aux pièces élémentaires de la carte étiquetée mises en lumière sur la figure 2.26. À droite, toutes les pièces élémentaires de la quadrangulation. Seules les navettes (en vert) et les géodésiques maximales (en rouge) sont représentées.

Pour une tranche composite, le nombre d'arêtes de la forêt codante est son *aire*, le nombre d'arbres de la forêt codante est sa *longueur de bord*, et la différence d'étiquette entre le dernier sommet racine et

le premier est sa *discrépance*. Pour un quadrilatère à bords géodésiques, les nombres d'arêtes des forêts codantes sont ses *demi-aires*, le nombre commun d'arbres de ses forêts codantes est sa *diagonale*, et la différence d'étiquette entre le dernier sommet racine et le premier de sa première forêt codante est sa *discrépance*. Par exemple, sur la figure 2.26, la forêt étiquetée code une tranche composite d'aire 4, longueur de bord 3 et discrépance 0, et l'autre pièce élémentaire code un quadrilatère à bords géodésiques de demi-aires 4 et 10, diagonale 4 et discrépance 4.

2.2.2.2 Pièces élémentaires continues

On rappelle (voir (2.3)) que $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des fonctions continues définies sur un intervalle fermé. Pour $f \in \mathcal{C}$, on définit la pseudo-distance δ_f sur son intervalle de définition $I(f)$ par

$$\delta_f(s, t) := f(s) + f(t) - 2 \min_{[s \wedge t, s \vee t]} f, \quad s, t \in I(f).$$

On fixe $A, L \in (0, \infty)$ et $\Delta \in \mathbb{R}$, et on considère les processus suivants :

- ♦ un pont brownien $B = (B_t)_{0 \leq t \leq L}$ de longueur L de 0 à Δ avec variance 3, c'est-à-dire que $B/\sqrt{3}$ est un pont brownien de longueur L de 0 à $\Delta/\sqrt{3}$;
- ♦ un pont brownien de premier passage $X = (X_t)_{0 \leq t \leq A}$ de longueur A de 0 à $-L$, indépendant de B ;
- ♦ la tête du serpent brownien $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq A}$ dirigée par X , indépendante de B .

Soit enfin

$$W_t := Z_t + B_{-\underline{X}_t}, \quad 0 \leq t \leq A.$$

Définition 2.19

La tranche composite d'aire A , longueur de bord L , et discrépance Δ est le collage de $([0, A], \delta_W)$ selon la relation d'équivalence $\{\delta_X = 0\}$, où (X, W) a la loi précédemment décrite.

Les quadrilatères à bords géodésiques sont un peu plus complexes à définir car ils correspondent à des couples de forêts partageant leurs planchers; les ingrédients de base sont toutefois similaires. Pour visualiser les choses, représentons, comme sur la figure 2.26, la forêt étiquetée correspondant à la demi-arête considérée dans le demi-plan supérieur et celle correspondant à la demi-arête inverse dans le demi-plan inférieur. On imagine que le temps 0 correspond au sommet le plus à gauche du plancher et on parcourt la forêt du haut en temps positif et celle du bas à l'envers en temps négatif. Considérant des versions continues de forêts étiquetées, on utilise un processus $(X^{(+)}, W^{(+)})$ pour la forêt du haut et $(X^{(-)}, W^{(-)})$ pour celle du bas, ces processus étant définis de façon similaire au cas précédent mais construits sur un pont commun de variance 1 correspondant au plancher commun.

On fixe $A, \bar{A}, H \in (0, \infty)$ et $\Delta \in \mathbb{R}$, et on considère les processus suivants :

- ♦ un pont brownien $B = (B_t)_{0 \leq t \leq H}$ de longueur H de 0 à Δ ;
- ♦ un pont brownien de premier passage $X^{(+)}$ de longueur A de 0 à $-H$, indépendant de B ;
- ♦ la tête du serpent brownien $Z^{(+)}$ dirigée par $X^{(+)}$, indépendante de B ;
- ♦ le processus

$$W_t^{(+)} := Z_t^{(+)} + B_{-\underline{X}_t^{(+)}}, \quad 0 \leq t \leq A.$$

On définit également un processus $W^{(-)}$ de façon similaire à partir de la tête du serpent brownien $Z^{(-)}$ dirigée par un pont brownien de premier passage $X^{(-)}$ de longueur $\bar{A}$ de 0 à $-H$ et du même pont brownien B . On définit enfin (X, W) sur $[-\bar{A}, A]$ par les formules

$$X_t := \begin{cases} X_t^{(+)} & \text{si } 0 \leq t \leq A \\ X_{-t}^{(-)} & \text{si } -\bar{A} \leq t \leq 0 \end{cases}, \quad W_t := \begin{cases} W_t^{(+)} & \text{si } 0 \leq t \leq A \\ W_{-t}^{(-)} & \text{si } -\bar{A} \leq t \leq 0 \end{cases}.$$

On pose alors, pour $s, t \in [-\bar{A}, A]$,

$$\widehat{\delta}_W(s, t) := \begin{cases} \delta_W(s, t) & \text{si } st \geq 0 \\ \infty & \text{si } st < 0 \end{cases}.$$

Cette pseudo-distance correspond au fait qu'on utilise la bijection par intervalles avec un intervalle correspondant au temps négatif et un intervalle correspondant au temps positif.

Définition 2.20

Le quadrilatère de demi-aires A et $\bar{A}$, diagonale H , et discrédance Δ est le collage de $([-\bar{A}, A], \widehat{\delta}_W)$ selon la relation d'équivalence $\{\delta_X = 0\}$, où (X, W) a la loi précédemment décrite.

Les limites d'échelle des tranches composites discrètes et des quadrilatères à bords géodésiques discrets apparaissant dans la section 2.2.2.1, avec des caractéristiques prescrites, sont les analogues continus que nous venons de définir. On fixe 3 suites $(a_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$, $(l_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ et $(\delta_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A > 0, \quad \frac{l_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{9}{8n}\right)^{1/4} \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Delta \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2.21 limite d'échelle des tranches composites [BM22]

Soit Sl_n uniformément distribuée parmi l'ensemble des tranches composites d'aire a_n , longueur de bord l_n et discrédance δ_n . Alors l'espace métrique $(8n/9)^{-1/4} \text{Sl}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers une tranche composite (continue) d'aire A , longueur de bord L et discrédance Δ .

Pour les quadrilatères, on fixe $(a_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$, $(\bar{a}_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$, $(h_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ et $(\delta_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A > 0, \quad \frac{\bar{a}_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{A} > 0, \quad \frac{h_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H > 0, \quad \left(\frac{9}{8n}\right)^{1/4} \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Delta \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2.22 limite d'échelle des quadrilatères à bords géodésiques [BM22]

Soit Qd_n uniformément distribuée parmi l'ensemble des quadrilatères à bords géodésiques de demi-aires a_n et $\bar{a}_n$, diagonale h_n et discrédance δ_n . Alors l'espace métrique $(8n/9)^{-1/4} \text{Qd}_n$ tend en loi, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff, vers un quadrilatère à bords géodésiques (continu) de demi-aires A et $\bar{A}$, diagonale H et discrédance Δ .

Notre approche consiste à obtenir ces propositions à partir des cas connus du disque pour les tranches composites et de la sphère pour les quadrilatères. Plus précisément, nous commençons par obtenir dans [BM17] la convergence pour le disque brownien via des opérations de découpages similaires. Dans ce cas, l'objet codant est une forêt que l'on découpe en pièces élémentaires consistant en les arbres de la forêt. Les limites d'échelle des cartes correspondant à ces arbres, que l'on appelle *tranches*, sont obtenues et utilisées par Jean-François Le Gall dans [LG13]. Les tranches limite sont l'équivalent des tranches composites de longueur de bord et discrédance nulles. Dans ce cas, la définition 2.19 est adaptée en prenant pour X une excursion brownienne de longueur A . Une différence fondamentale avec ce que nous avons présenté ici réside en le fait que le nombre de ces tranches tend vers l'infini, ce qui nous amène à considérer un collage infini d'espaces métriques à la limite. On résout cette difficulté en montrant qu'une géodésique entre deux points typiques ne visite en fait qu'un nombre fini de tranches limites.

Il s'agit ensuite de lire les tranches composites et quadrilatères dans ces espaces connus. En fait, on utilise plutôt les versions non compactes correspondantes, à savoir le *demi-plan brownien* et le *plan brownien*, qui apparaissent comme limite d'échelle de quadrangulations infinies du demi-plan et du plan. L'intérêt est que ces derniers contiennent naturellement une famille de tranches composites et de quadrilatères et que leurs limites d'échelle contiennent un « flot continu » de tranches composites et de quadrilatères continus. Plus précisément, il s'agit de versions « libres » de ces objets et nous devons ensuite utiliser un argument de conditionnement.

Nous illustrons cela sur la figure 2.31, où l'on imagine le demi-plan brownien comme construit à partir d'une forêt étiquetée (continue) infinie. La portion du bord entre L et L' code une tranche libre $\text{Sl}^{(L,L')}$, la portion du bord entre L' et L'' code une tranche libre $\text{Sl}^{(L',L'')}$ et le collage de ces tranches obtenu en collant la navette de la première sur la géodésique maximale de la seconde donne la tranche libre codée par la portion du bord entre L et L'' .

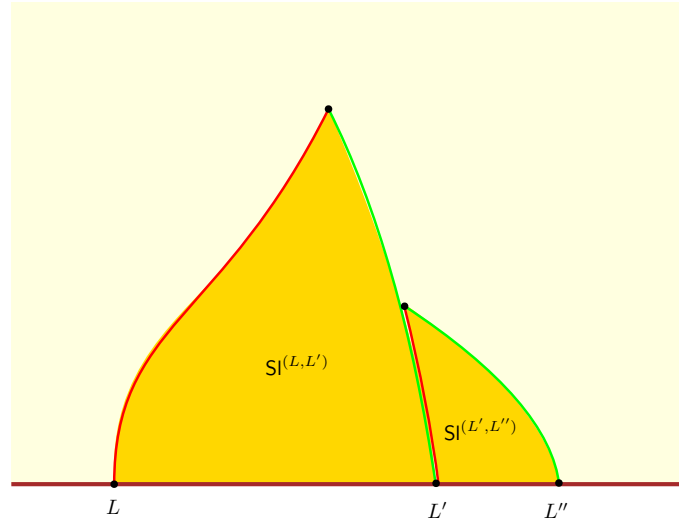


FIGURE 2.31. Flot de tranches composites libres dans le demi-plan brownien. L'union des régions jaune foncé forme la tranche $\text{Sl}^{(L,L'')}$. Comme avant, les navettes sont en vert et les géodésiques maximales en rouge.

2.2.2.3 Reconstitution des surfaces browniennes

Soit $(\mathcal{X}, \delta_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \delta_{\mathcal{Y}})$ deux espaces métriques géodésiques et $\wp_{\mathcal{X}}$, $\wp_{\mathcal{Y}}$ deux géodésiques de même longueur ℓ , respectivement dans $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$. La distance de l'union disjointe $\mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y}$ est définie par

$$\delta_{\mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y}}(x, y) := \begin{cases} \delta_{\mathcal{X}}(x, y) & \text{si } x, y \in \mathcal{X} \\ \delta_{\mathcal{Y}}(x, y) & \text{si } x, y \in \mathcal{Y} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

On peut considérer le *collage de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ selon $\wp_{\mathcal{X}}$ et $\wp_{\mathcal{Y}}$* , défini comme le collage

$$G(\mathcal{X}, \mathcal{Y}; \wp_{\mathcal{X}}, \wp_{\mathcal{Y}}) := (\mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y}, \delta_{\mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y}}) / \mathcal{R}$$

de $(\mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y}, \delta_{\mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y}})$ selon la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ la plus grossière qui satisfait $\wp_{\mathcal{X}}(t) \mathcal{R} \wp_{\mathcal{Y}}(t)$ pour tout $t \in [0, \ell]$.

Dans ce cas particulier, le fait que $\wp_{\mathcal{X}}$ et $\wp_{\mathcal{Y}}$ soient des géodésiques simplifie grandement l'équation (2.6). En effet, si $y_i \mathcal{R} x_{i+1}$ et $y_{i+1} \mathcal{R} x_{i+2}$, alors $\delta_{\mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y}}(y_i, x_{i+2}) = \delta_{\mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y}}(x_{i+1}, y_{i+1})$. En d'autres

termes, utiliser deux fois la relation $\mathcal{R}$ ne crée pas de raccourcis. Ainsi, la distance du collage est la distance δ_G dont les restrictions à $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ et $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ sont $\delta_{\mathcal{X}}$ et $\delta_{\mathcal{Y}}$ respectivement, et

$$\delta_G(x, y) = \delta_G(y, x) = \inf_{t \in [0, \ell]} \{ \delta_{\mathcal{X}}(x, \wp_{\mathcal{X}}(t)) + \delta_{\mathcal{Y}}(\wp_{\mathcal{Y}}(t), y) \} \quad \text{si } x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}.$$

Une procédure de collage similaire peut être définie pour deux géodésiques $\wp, \wp'$ de même longueur ℓ dans le même espace métrique géodésique $(\mathcal{X}, \delta)$. Dans ce cas, on définit $G(\mathcal{X}; \wp, \wp')$ comme le collage de $(\mathcal{X}, \delta)$ selon la relation d'équivalence la plus grossière contenant les couples $(\wp(t), \wp'(t))$, pour $t \in [0, \ell]$, et la distance du quotient se simplifie en

$$\delta(x, y) \wedge \inf_{t \in [0, \ell]} \{ \delta(x, \wp(t)) + \delta(\wp'(t), y) \} \wedge \inf_{t \in [0, \ell]} \{ \delta(x, \wp'(t)) + \delta(\wp(t), y) \}.$$

On peut vérifier que l'opération de collage le long de géodésiques est « compatible » avec la convergence au sens de Gromov–Hausdorff au sens suivant. On rappelle qu'une *correspondance* entre deux espaces métriques $(\mathcal{X}, \delta_{\mathcal{X}})$ et $(\mathcal{Y}, \delta_{\mathcal{Y}})$ est un sous-ensemble $\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ dont les projections coordonnées sont $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ et que sa *distorsion* est

$$\text{dis}(\mathfrak{R}) := \sup \{ |\delta_{\mathcal{X}}(x, x') - \delta_{\mathcal{Y}}(y, y')| : (x, x'), (y, y') \in \mathfrak{R} \}.$$

Considérant, pour $1 \leq i \leq k$, des géodésiques $\wp_{\mathcal{X}}^i$ et $\wp_{\mathcal{Y}}^i$ de même longueur ℓ^i , respectivement dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, on dit que la correspondance $\mathfrak{R}$ est *compatible* avec ces géodésiques si, pour $1 \leq i \leq k$, $(\wp_{\mathcal{X}}^i(0), \wp_{\mathcal{Y}}^i(0)) \in \mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R} \cap (\wp_{\mathcal{X}}^i([0, \ell^i]) \times \wp_{\mathcal{Y}}^i([0, \ell^i]))$ est une correspondance entre $\wp_{\mathcal{X}}^i([0, \ell^i])$ et $\wp_{\mathcal{Y}}^i([0, \ell^i])$. La *distance de Gromov–Hausdorff marquée* entre $(\mathcal{X}, (\wp_{\mathcal{X}}^1, \dots, \wp_{\mathcal{X}}^k))$ et $(\mathcal{Y}, (\wp_{\mathcal{Y}}^1, \dots, \wp_{\mathcal{Y}}^k))$ est définie comme

$$\frac{1}{2} \inf_{\mathfrak{R}} \text{dis}(\mathfrak{R}),$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des correspondances entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ qui sont compatibles avec $\wp_{\mathcal{X}}^i$ et $\wp_{\mathcal{Y}}^i$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Proposition 2.23 $\Rightarrow$ *convergence d'un collage le long de géodésiques* [BM22] $\Leftarrow$

Soit $((\mathcal{X}_n, (\wp_n^1, \dots, \wp_n^k)))_n$ (resp. $((\mathcal{Y}_n, (\gamma_n^1, \dots, \gamma_n^l)))_n$) une suite d'espaces géodésiques compacts munis de géodésiques d'intérieurs disjoints deux à deux qui converge, au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff marquée, vers $(\mathcal{X}, (\wp^1, \dots, \wp^k))$ (resp. vers $(\mathcal{Y}, (\gamma^1, \dots, \gamma^l))$). On suppose de plus que $\wp_n^1$ et γ_n^1 ont la même longueur pour chaque n . Alors

$$(G(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n; \wp_n^1, \gamma_n^1), (\wp_n^2, \dots, \wp_n^k, \gamma_n^2, \dots, \gamma_n^l)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (G(\mathcal{X}, \mathcal{Y}; \wp^1, \gamma^1), (\wp^2, \dots, \wp^k, \gamma^2, \dots, \gamma^l))$$

au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff marquée.

De même, si on suppose que $\wp_n^1$ et $\wp_n^2$ ont la même longueur, alors

$$G(\mathcal{X}_n; \wp_n^1, \wp_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(\mathcal{X}; \wp^1, \wp^2)$$

et, à condition que $\wp_n^3, \dots, \wp_n^k$ restent des géodésiques dans $G(\mathcal{X}_n; \wp_n^1, \wp_n^2)$ pour tout n , alors cette convergence a également lieu au sens marqué, en considérant $(\wp_n^3, \dots, \wp_n^k)$ et $(\wp^3, \dots, \wp^k)$.

Afin de rentrer dans ce cadre, on voit une carte comme un espace géodésique compact, en considérant chaque arête comme isométrique à un segment réel de longueur 1 (c'est ce qu'on appelle le *graphe métrique* [BBI01] associé). La restriction aux sommets de la carte de la distance obtenue étant la distance de graphe, les deux espaces métriques correspondant à une carte sont à d_{GH} -distance inférieure à $1/2$.

On peut vérifier que les convergences des propositions 2.21 et 2.22 ont lieu au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff marquée, en considérant les navette(s) et géodésique(s) maximale(s).

Ensuite, on peut voir que, conditionnellement aux quatre premières coordonnées du vecteur discret de la proposition 2.16, les pièces élémentaires d’une quadrangulation uniforme sont uniformément distribuées parmi celles qui ont les bons paramètres. Ainsi, une fois renormalisées par $(8n/9)^{1/4}$, elles convergent vers leurs équivalents continus. La carte initiale étant obtenue par collage des pièces discrètes, des applications successives de la proposition 2.23 permettent d’obtenir le théorème 1.13.

Avec cette approche, on retrouve aussi simplement les résultats de topologie et dimension de Hausdorff. En effet, les pièces élémentaires limites sont de topologie plane, de dimension de Hausdorff 4 et, pour les tranches composites, leurs bords ont dimension 2. Cela s’obtient encore une fois à partir des cas connus de la sphère et du disque. Ensuite, le collage de ces pièces donne immédiatement la dimension de Hausdorff. Pour la topologie, on observe que la surface de départ donne une certaine décomposition en pièces élémentaires de topologie plane selon un schéma. Le collage de pièces limites, également de topologie plane, selon le même schéma donne alors la même topologie.

2.2.3 Sphère brownienne et constructions alternatives dans le cas du disque

Afin de compléter la présentation, nous rappelons que la sphère brownienne peut être définie comme le collage de $[0, 1]$ muni de la pseudo-distance

$$s, t \in [0, 1] \mapsto W_s + W_t - 2 \max \left(\min_{[s \wedge t, s \vee t]} W, \min_{[s \vee t, 1] \cup [0, s \wedge t]} W \right)$$

selon la relation d’équivalence $\{\delta_X = 0\}$, où X est une excursion brownienne normalisée et W est la tête du serpent brownien dirigée par X . On peut également dire que c’est le collage d’une unique tranche composite d’aire 1, longueur de bord 0, et discrédance 0 selon ses navette et géodésique maximale, c’est-à-dire de $([0, 1], \delta_W)_{/\{\delta_X=0\}}$ (on rappelle que l’on a adapté la définition 2.19 pour une longueur de bord nulle). Ainsi, le collage de la navette sur la géodésique maximale revient à prendre en compte le second minimum dans la formule ci-dessus.

La structure $\mathcal{M}$ dans ce cas est l’arbre brownien, que l’on peut définir comme le quotient métrique $([0, 1], \delta_X)_{/\{\delta_X=0\}}$. Comme précédemment, les points de $\mathcal{M}$ sont munies d’étiquettes : pour $a \in \mathcal{M}$, son étiquette W_a est définie comme la valeur commune de W sur chacun de ses représentants. Notons qu’ici, nous n’avons pas translaté les étiquettes et celles-ci peuvent donc être négatives. Cela ne change rien pour les pseudo-distances que l’on considère. Le processus $(W_a)_{a \in \mathcal{M}}$ peut ainsi être vu comme un mouvement brownien indexé par un arbre brownien, au sens où, pour chaque segment de $\mathcal{M}$, les valeurs prises par le processus sur le segment forme un mouvement brownien et les mouvements browniens correspondant à des segments disjoints sont indépendants.

Nous terminons cette section en mentionnant que, dans le cas du disque, d’autres constructions ont été proposées par Jean-François Le Gall [LG19, LG20]. Dans ce cas, le codage que nous avons présenté dans les sections précédentes consiste en une unique forêt étiquetée. À la limite, le disque brownien BD_L de périmètre L s’obtient ainsi comme le collage d’une unique tranche composite d’aire 1, longueur de bord L , et discrédance 0 selon ses navette et géodésique maximale. On rappelle par ailleurs que les étiquettes donnent les distances à un point uniformément choisi dans la carte du disque.

La première construction de Jean-François Le Gall [LG19] consiste à voir le codage avec des étiquettes qui donnent la distance au bord de la carte. Elle utilise un quotient métrique similaire mais, plutôt que d’utiliser le serpent brownien indexé par un pont de premier passage, le quotient est défini à partir d’une excursion du processus précédent $(W_a)_{a \in \mathcal{M}}$. La mesure d’excursion en question a été introduite et étudiée par Céline Abraham et Jean-François Le Gall [ALG18]. En gros, les excursions correspondent aux composantes connexes de $\{a \in \mathcal{M} : W_a \neq 0\}$ et sont indépendantes conditionnellement à la taille du bord des composantes.

On obtient alors toujours un processus indexé par un arbre brownien mais les trajectoires issues du sommet racine de l'arbre (la classe d'équivalence dans $\mathcal{M}$ de 0) commencent à 0, restent strictement positives pendant un temps strictement positif et sont arrêtées si elles reviennent en 0. Avec cette approche, Jean-François Le Gall [LG19] montre en particulier que le complémentaire d'une boule de rayon donné centrée en un point uniformément choisi dans la sphère brownienne est une collection de disques browniens indépendants conditionnellement à leurs aires et périmètres. Visuellement, cela revient à couper la figure 1.13 selon un plan horizontal.

La seconde construction de Jean-François Le Gall [LG20] consiste à voir le codage avec des étiquettes qui donnent la distance à un point uniformément distribué sur le bord. Ici aussi, la construction est similaire. Dans la construction de la définition 2.19, le pont d'étiquettes du bord B n'est plus un pont brownien de 0 à 0 multiplié par $\sqrt{3}$ mais maintenant un pont de Bessel 5-dimensionnel de 0 à 0 multiplié par $\sqrt{3}$. De plus, le processus W est tronqué en ne conservant que les excursions de $X - \underline{X}$ sur lesquelles W reste positif. Visuellement, le processus (X, Z) de la définition 2.19 donne une forêt d'arbres browniens qui indexent des mouvements browniens (chaque arbre correspondant à une excursion de X au-dessus du minimum passé $\underline{X}$). Le processus (X, W) est ensuite obtenu en translatant les étiquettes arbre par arbre selon le pont d'étiquettes B et on ne conserve que les arbres dont les étiquettes restent positives.

Cette construction permet notamment de montrer que les distances d'un point parcourant le bord d'un disque brownien à un point uniformément choisi sur le bord évoluent selon un processus de Bessel 5-dimensionnel alors que celles à un point uniformément choisi dans le disque évoluaient selon un mouvement brownien (dans les deux cas avec un facteur de variance $\sqrt{3}$).

2.3 Approches bijectives sur les cartes

2.3.1 Présentation

Nous présentons maintenant les approches bijectives entre classes de cartes similaires que nous avons introduites dans [Bet14] sur les quadrangulations du disque et améliorées dans [Bet20], où nous traitons les cartes planes biparties et, dans certains cas, quasibiparties. Dans cette section, nous ne considérons que des cartes planes. Rappelons qu'une carte plane est *bipartie* si et seulement si toutes ses faces sont de degrés pairs. Une carte plane est *quasibipartie* si elle possède exactement 2 faces de degré impair. Notons que, comme la somme des degrés des faces est égale au double du nombre d'arêtes, le nombre de faces avec un degré impair doit être pair; ainsi, les cartes quasibiparties sont les cartes les plus simples à considérer après les cartes biparties. Pour une meilleure visibilité et parce qu'elles jouent un rôle particulier, les faces de degré impair seront systématiquement colorées en orange.

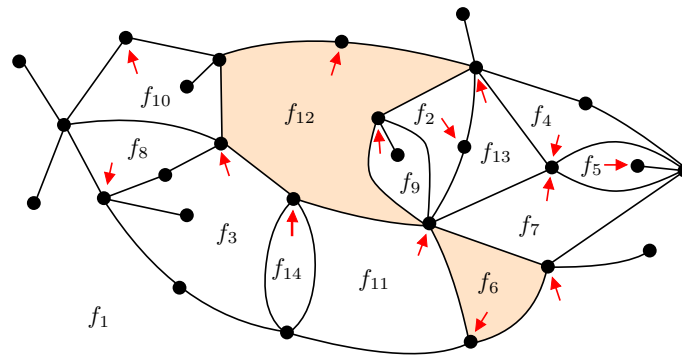


FIGURE 2.32. Une carte quasibipartie (car elle a exactement deux faces, f_6 et f_{12} , de degré impair) de type $(20, 4, 8, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 6, 4, 7, 4, 2)$. Chaque face possède un coin marqué (représenté par une pointe de flèche).

Dans ce cadre bijectif, il est plus naturel d'enraciner chacune des faces plutôt qu'une seule. Pour un r -uplet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$ d'entiers strictement positifs, notons $M(\mathbf{a})$ le nombre de cartes planes ayant r faces, numérotées $f_1, \dots, f_r$, de degrés respectifs $a_1, \dots, a_r$, où chaque face possède un coin marqué. Le r -uplet $\mathbf{a}$ sera appelé le *type* de telles cartes (voir la figure 2.32). Par des considérations élémentaires et la formule caractéristique d'Euler, les entiers

$$E(\mathbf{a}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r a_i \quad \text{et} \quad V(\mathbf{a}) := E(\mathbf{a}) - r + 2 \quad (2.7)$$

sont respectivement les nombres d'arêtes et de sommets de cartes de type $\mathbf{a}$. William Tutte [Tut62c] a montré que, quand au plus deux a_i sont impairs, c'est-à-dire pour des cartes biparties ou quasibiparties,

$$M(\mathbf{a}) = \frac{(E(\mathbf{a}) - 1)!}{V(\mathbf{a})!} \prod_{i=1}^r \alpha(a_i), \quad \text{où} \quad \alpha(x) := \frac{x!}{[x/2]! [(x-1)/2]!}. \quad (2.8)$$

Nous avons noté $\lfloor \cdot \rfloor$ la fonction partie entière. La formule (2.8), communément appelée *formule des slicings de Tutte*, a ensuite été retrouvée par diverses méthodes. Par Robert Cori [Cor75, Cor76], à l'aide de ce qu'il appelle *bijection de transfert*, consistant essentiellement à transférer itérativement un degré d'une face à une face voisine, jusqu'à ce que la carte ait une structure très simple. Utilisant un codage bijectif par arbres bourgeonnants, Gilles Schaeffer [Sch97] l'a ensuite retrouvée dans le cas bipartie. Enfin, nous pouvons également l'obtenir en utilisant la bijection de Bouttier–Di Francesco–Guitter [BDG04] : voir [CF14] pour le calcul des fonctions génératrices associées en utilisant cette approche.

Nous allons donner une interprétation bijective pour les identités combinatoires suivantes, ce qui permet en quelque sorte de « faire grossir » des cartes en ajoutant à une carte bipartie deux nouveaux coins, soit sur la même face, soit sur deux faces différentes. Par « ajouter un coin à une face », on entend faire augmenter de 1 le degré de la face en question.

Proposition 2.24 ➡ ajout de deux coins à la même face [Bet20] ➡

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in (2\mathbb{N}^*)^r$ un r -uplet d'entiers *pairs* strictement positifs. On définit le r -uplet $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r) := (a_1 + 2, a_2, \dots, a_r)$. Alors l'identité suivante est vérifiée :

$$(a_1 + 1)(a_1 + 2) E(\mathbf{a}) M(\mathbf{a}) = \lfloor \tilde{a}_1/2 \rfloor \lfloor (\tilde{a}_1 - 1)/2 \rfloor V(\tilde{\mathbf{a}}) M(\tilde{\mathbf{a}}). \quad (2.9)$$

Proposition 2.25 ➡ ajout d'un coin à chacune de deux faces différentes [Bet20] ➡

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in (2\mathbb{N}^*)^r$ un r -uplet d'entiers *pairs* strictement positifs. On définit le r -uplet $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r) := (a_1 + 1, a_2 + 1, a_3, \dots, a_r)$. Alors l'identité suivante est vérifiée :

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) E(\mathbf{a}) M(\mathbf{a}) = \lfloor \tilde{a}_1/2 \rfloor \lfloor \tilde{a}_2/2 \rfloor V(\tilde{\mathbf{a}}) M(\tilde{\mathbf{a}}). \quad (2.10)$$

Pour le r -uplet $(2, \dots, 2)$, il est facile de voir que $M(2, \dots, 2) = 2^{r-1}(r-1)!$ car il n'y a qu'une seule carte avec r faces de degrés 2 et une première face choisie avec son coin marqué, et il y a $(r-1)!$ façons d'ordonner les faces restantes et 2^{r-1} façons de choisir les coins marqués restants. À l'aide de cette condition initiale et des propositions ci-dessus (avec l'évidente échangeabilité des coordonnées de $\mathbf{a}$), on obtient une nouvelle preuve de (2.8) dans le cas où chaque $a_i \geq 2$. Le cas manquant (où il y a une coordonnée de $\mathbf{a}$ égale à 1) peut être obtenu en utilisant la proposition supplémentaire 2.27 ci-dessous.

Nous utilisons des bijections que nous appelons *slit-slide-sew*, et dont l'idée est la suivante. Nous interpréterons les membres de (2.9) et (2.10) comme comptant des cartes munies d'éléments distingués. Plus précisément, dans tous les cas, le terme en M compte des cartes d'un certain type et les trois

préfacteurs compteront quelque chose dont le nombre ne dépend que de ce type : ce peut être un coin, une arête, un sommet, ou quelque chose d'un peu plus compliqué. Par exemple, le membre gauche de (2.10) compte des cartes de type $\mathbf{a}$ avec un coin distingué dans f_1 , un coin distingué dans f_2 et une arête distinguée (pour tout i , il y a $a_i + 1$ coins dans f_i en raison du coin déjà marqué).

La méthode repose sur un principe de découpage le long d'un chemin et recollement après un léger décalage. Sans trop rentrer dans les détails, à l'aide des éléments distingués, on choisit de façon canonique un chemin le long duquel on « coupe » puis on recolle en créant un léger décalage. Cette opération modifie légèrement la carte le long du chemin mais n'affecte pas ses faces, sauf les deux situées aux extrémités du chemin. De nouveaux éléments distingués apparaissent naturellement dans la carte résultante et l'image du chemin initial pourra être retrouvé à l'aide de ces nouveaux éléments, afin de pouvoir inverser la construction.

En outre, nous décomposons nos bijections en deux « sous-bijections » d'intérêt propre, qui peuvent être pensées comme « transférant » un coin d'une face, disons f_{r+1} , à une autre face, disons f_1 . Dans le cas où f_{r+1} a un degré 1, elle disparaît en quelque sorte en un sommet. Nous avons choisi d'utiliser une $r+1$ -ième face pour ces opérations car les bijections précédentes s'obtiennent comme des compositions des suivantes en utilisant une face supplémentaire. Plus précisément, par une légère modification, on peut transformer une arête distinguée en une face supplémentaire de degré 2 et utiliser deux fois les bijections interprétant les identités suivantes afin de transférer les deux coins de la face supplémentaire sur les faces souhaitées.

Proposition 2.26 $\Leftarrow$ transfert d'un coin d'une face de degré au moins deux [Bet20] $\Rightarrow$

Considérons un $r+1$ -uplet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{r+1})$ d'entiers strictement positifs avec $a_{r+1} \geq 2$, et tel que toutes les coordonnées sont paires ou tel que seulement a_{r+1} et une autre coordonnée sont impaires. Soit aussi $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{r+1}) := (a_1 + 1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1} - 1)$. Alors l'identité suivante est vérifiée :

$$(a_1 + 1) \lfloor a_{r+1}/2 \rfloor M(\mathbf{a}) = \lfloor \tilde{a}_1/2 \rfloor (\tilde{a}_{r+1} + 1) M(\tilde{\mathbf{a}}). \quad (2.11)$$

Proposition 2.27 $\Leftarrow$ transfert d'un coin d'une face de degré un [Bet20] $\Rightarrow$

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r, 1)$ un $r+1$ -uplet d'entiers strictement positifs avec deux coordonnées impaires et soit $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r) := (a_1 + 1, a_2, \dots, a_r)$. Alors l'identité suivante est vérifiée :

$$(a_1 + 1) M(\mathbf{a}) = \lfloor \tilde{a}_1/2 \rfloor V(\tilde{\mathbf{a}}) M(\tilde{\mathbf{a}}). \quad (2.12)$$

On peut avoir l'impression qu'il manque un facteur dans le membre gauche de (2.12) mais en réalité, il faut voir la $r+1$ -ième face (de degré 1) comme un second élément distingué, de sorte qu'il y a bien deux éléments distingués dans chacun des membres de (2.11) et (2.12).

Commençons par préciser la terminologie. On rappelle qu'une *demi-arête* est une arête donnée avec l'une de ses deux orientations. Pour une demi-arête h , on note h^- son origine, h^+ sa cible, et $\text{rev}(h)$ son inverse (la même arête avec l'autre orientation). Il sera pratique de considérer les coins comme des demi-arêtes n'ayant pas d'origine, seulement une cible. En particulier, si c est un coin, on notera c^+ le sommet incident. Par convention, distinguer un coin le « divise » en deux nouveaux coins. En d'autres termes, lorsque l'on distingue le même coin pour la seconde fois, on doit préciser lequel de ses deux côtés est distingué : voir la figure 2.33.

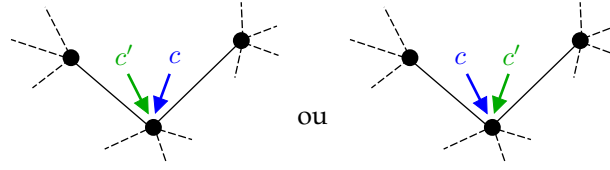


FIGURE 2.33. Les deux manières différentes de distinguer deux fois le même coin.

Définition 2.28 — chemin —

Un **chemin** d'un sommet v à un sommet v' est une suite finie $\mathbb{p} = (\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \dots, \mathbb{p}_\ell)$ de demi-arêtes telles que $\mathbb{p}_1^- = v$, pour $1 \leq k \leq \ell - 1$, $\mathbb{p}_k^+ = \mathbb{p}_{k+1}^-$, et $\mathbb{p}_\ell^+ = v'$. Sa **longueur** est l'entier $[\mathbb{p}] := \ell$. Par convention, le chemin vide a une longueur 0.

Un chemin $\mathbb{p}$ est **auto-évitant** s'il ne visite pas deux fois le même sommet, c'est-à-dire

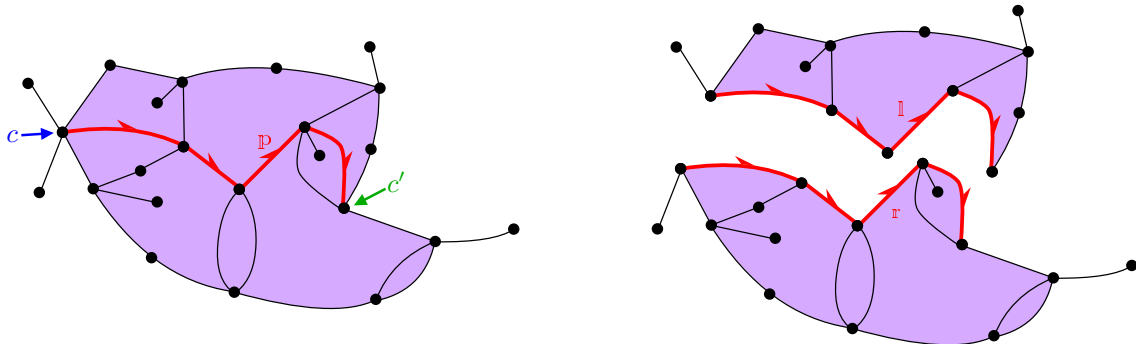
$$|\{\mathbb{p}_1^-, \dots, \mathbb{p}_{[\mathbb{p}]}^-, \mathbb{p}_{[\mathbb{p}]}^+\}| = [\mathbb{p}] + 1.$$

L'**inverse** du chemin $\mathbb{p} = (\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \dots, \mathbb{p}_\ell)$ est $\text{rev}(\mathbb{p}) := (\text{rev}(\mathbb{p}_\ell), \text{rev}(\mathbb{p}_{\ell-1}), \dots, \text{rev}(\mathbb{p}_1))$.

Soit $\mathbb{p}$ un chemin. On note $\mathbb{p}_{i \rightarrow j}$ le chemin $(\mathbb{p}_i, \dots, \mathbb{p}_j)$ si $1 \leq i \leq j \leq [\mathbb{p}]$, ou le chemin vide sinon. Si $\mathbb{q}$ est un autre chemin satisfaisant $\mathbb{q}_1^- = \mathbb{p}_{[\mathbb{p}]}^+$, on définit

$$\mathbb{p} \bullet \mathbb{q} := (\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_{[\mathbb{p}]}, \mathbb{q}_1, \dots, \mathbb{q}_{[\mathbb{q}]})$$

la concaténation de $\mathbb{p}$ avec $\mathbb{q}$. La notion de distance que nous utilisons est encore la distance de graphe. La **géodésique la plus à gauche** d'un coin c à un sommet ou à un coin est construite comme suit. Tout d'abord, on considère toutes les géodésiques de c^+ au sommet ou au sommet correspondant au coin. On prend l'ensemble de tous les premiers pas de ces géodésiques. En partant de c , on sélectionne la première demi-arête à sa gauche qui appartient à cet ensemble. Autrement dit, on tourne dans le sens horaire autour de c^+ et on sélectionne la première demi-arête de cet ensemble que l'on rencontre. On itère le processus à partir de cette demi-arête jusqu'à atteindre le sommet visé. Remarquons que ce chemin peut être vide si c^+ est le sommet visé, et qu'il s'agit d'une géodésique. La **géodésique la plus à droite** d'un coin à un sommet ou à un coin est définie de manière similaire, en remplaçant le mot *gauche* par le mot *droite* dans la définition précédente; voir la figure 2.34.

FIGURE 2.34. Découpe d'une carte le long de la géodésique la plus à gauche $\mathbb{p}$ d'un coin c à un coin c' . Cela crée une copie gauche $\mathbb{l}$ et une copie droite $\mathbb{r}$ du chemin $\mathbb{p}$. Les coins marqués et les noms des faces n'apparaissent pas.

À l'aide de deux coins c et c' et d'un chemin auto-évitant $\mathbb{p}$ allant de c^+ à c'^+ dans une carte $\mathbf{m}$,

on peut découper la carte $\mathbf{m}$ le long de $\mathbb{p}$ du coin c au coin c' en dédoublant chaque arête de $\mathbb{p}$. Dans l'objet résultant, il y a deux copies du chemin initial $\mathbb{p}$, une à gauche de $\mathbb{p}$ et une à sa droite. Celles-ci sont respectivement appelées *copie gauche* et *copie droite* de $\mathbb{p}$: voir la figure 2.34.

Remarque 2.29

Notons que, si c et c' n'appartiennent pas à la même face de $\mathbf{m}$, alors l'objet résultant est une carte, alors qu'il s'agit de deux cartes séparées si c et c' appartiennent à la même face de $\mathbf{m}$.

On dit qu'un demi-arête h s'*approche* d'un sommet v si $d_{\mathbf{m}}(h^+, v) < d_{\mathbf{m}}(h^-, v)$, qu'elle s'*éloigne* de v si $d_{\mathbf{m}}(h^+, v) > d_{\mathbf{m}}(h^-, v)$ et qu'elle est *parallèle* à v si $d_{\mathbf{m}}(h^+, v) = d_{\mathbf{m}}(h^-, v)$. Dans les figures et pictogrammes suivants, on représente les demi-arêtes à l'aide de demi-pointes de flèche et on utilise les notations abrégées $\rightarrow v$ et $\leftarrow v$ pour signifier que l'on s'approche ou que l'on s'éloigne de v : voir la figure 2.35. Si l'arête e n'est pas parallèle au sommet v , on notera $\vec{e}^v$ la demi-arête correspondante à e qui s'approche de v . On utilisera également toutes les définitions précédentes pour un coin au lieu d'un sommet ; dans ce cas, le sommet en question sera le sommet incident au coin. La *géodésique la plus à gauche* et la *géodésique la plus à droite* d'une demi-arête h , dirigée vers un sommet ou un coin, vers ce dernier sommet ou coin est définie par la procédure décrite précédemment, en prenant la demi-arête h comme point de départ (h ne fait pas partie de la géodésique).

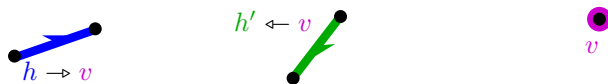


FIGURE 2.35. Représentation pictographique d'une demi-arête h s'approchant d'un sommet v , et d'une demi-arête h' s'éloignant de v .

On termine cette section par quelques faits élémentaires pour les cartes planes biparties et quasibiparties, illustrés sur la figure 2.36. Rappelons que, d'après le théorème de Jordan, un cycle dans une carte plane sépare toujours la carte en exactement deux composantes connexes.

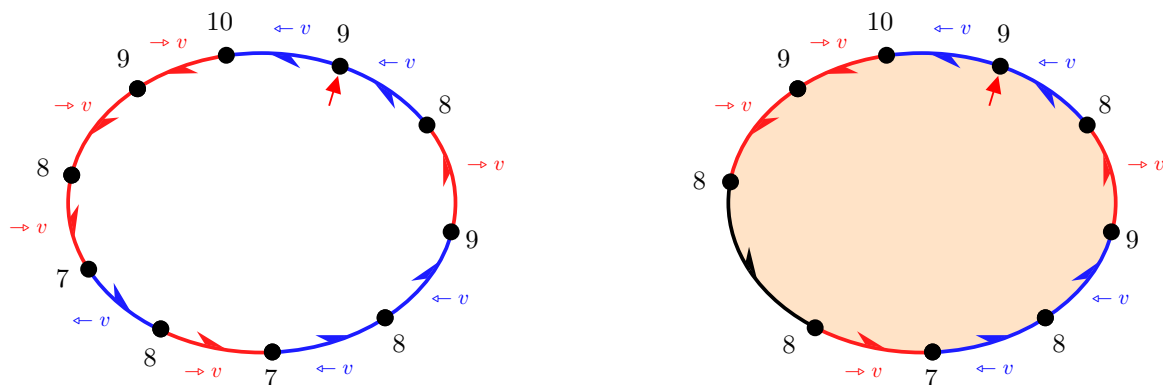


FIGURE 2.36. Illustration de la proposition 2.30. Le nombre à côté d'un sommet représente la distance de ce sommet à un sommet fixé non représenté. À gauche. Une face dans une carte bipartie. La moitié des demi-arêtes s'approchent du sommet fixé. À droite. Une face de degré impair dans une carte quasibipartie. Une arête est parallèle au sommet fixé et exactement la moitié des demi-arêtes restantes s'approchent du sommet fixé.

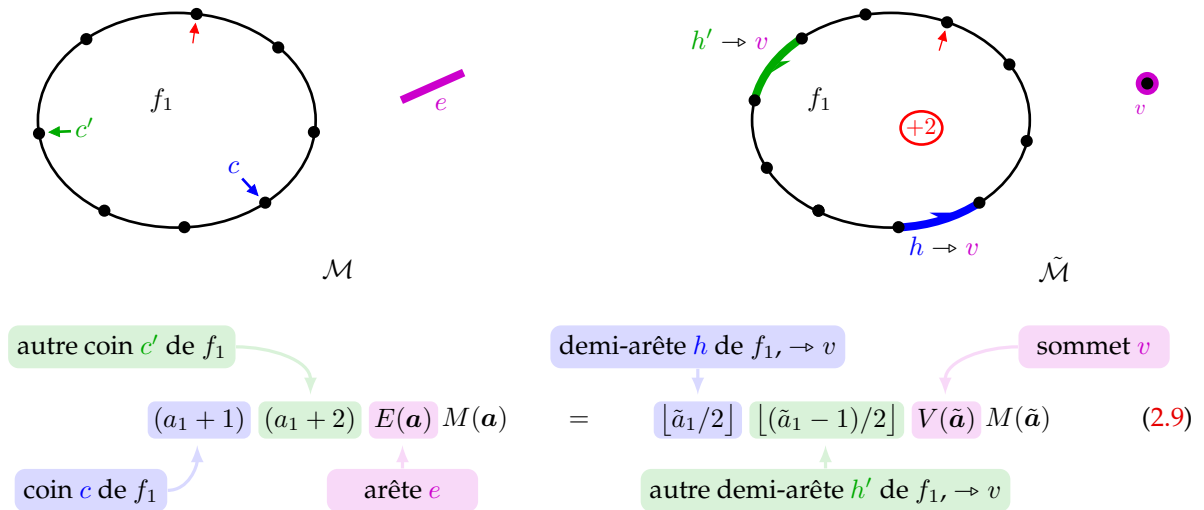
Proposition 2.30 $\Rightarrow$ répartition des demi-arêtes incidentes à une face [Bet20] $\Leftarrow$

- (i) Dans une carte bipartie, aucune arête ne peut être parallèle à un sommet. Plus précisément, pour une face donnée et un sommet donné, exactement la moitié des demi-arêtes incidentes à la face s'approchent du sommet, l'autre moitié s'en éloignant.
- (ii) Dans une carte quasibipartie, un cycle a une longueur impaire si et seulement si il sépare les deux faces de degrés impairs. De plus, pour tout sommet v fixé, parmi les a demi-arêtes incidentes à une face de degré impair, exactement une est parallèle à v , exactement $(a-1)/2$ s'approchent de v et exactement $(a-1)/2$ s'éloignent de v . Pour une face de degré pair, zéro ou deux de ses demi-arêtes incidentes sont parallèles à v , et les demi-arêtes incidentes restantes sont également réparties entre celles qui s'approchent de v et celles qui s'éloignent de v .

2.3.2 Ajout de deux coins

2.3.2.1 Ajout à la même face

On fixe un r -uplet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in (2\mathbb{N}^*)^r$ et on définit $\tilde{\mathbf{a}} := (a_1 + 2, a_2, \dots, a_r)$ comme dans l'énoncé de la proposition 2.24. On considère, d'une part, l'ensemble $\mathcal{M}$ des quadruples $(\mathbf{m}; e, c, c')$ où $\mathbf{m}$ est une carte plane de type $\mathbf{a}$, e est une arête distinguée et c, c' sont deux coins distingués de la face f_1 . D'autre part, on considère l'ensemble $\tilde{\mathcal{M}}$ des quadruples $(\tilde{\mathbf{m}}; v, h, h')$ où $\tilde{\mathbf{m}}$ est une carte plane de type $\tilde{\mathbf{a}}$ ayant un sommet distingué v et deux demi-arêtes distinguées distinctes h et h' incidentes à la face f_1 , et qui s'approchent de v . Le pictogramme suivant résume ces définitions (le $+2$ rouge à droite signifie que la taille de f_1 a augmenté de 2, et la pointe de flèche rouge est le coin marqué de f_1) :



La proposition 2.30.(i) permet de voir que les cardinaux des ensembles $\mathcal{M}$ et $\tilde{\mathcal{M}}$ sont exactement les membres de (2.9), rappelée ci-dessus. On présente maintenant une bijection explicite entre ces deux ensembles, qui donne ainsi une interprétation combinatoire de la proposition 2.24. Voir les figures 2.37 et 2.38.

Pour un quadruple $(\mathbf{m}; e, c, c') \in \mathcal{M}$, puisque $\mathbf{m}$ est bipartie, l'arête e ne peut pas être parallèle à c ; les demi-arêtes $\vec{e}^{c'}$ et $\vec{e}^c$ sont donc bien définies. On dit que $(\mathbf{m}; e, c, c')$ est *simple* si $\vec{e}^{c'} = \text{rev}(\vec{e}^c)$, et *pincé* si $\vec{e}^{c'} = \vec{e}^c$.

Ajout de deux coins à la même face (cas simple). Soit $(m; e, c, c') \in \mathcal{M}$ un quadruple simple.

Étape a. Définition du chemin. On note $\mathfrak{c}$ la géodésique la plus à droite de $\vec{e}^c$ à c et $\mathfrak{c}'$ la géodésique la plus à droite de $\vec{e}^{c'}$ à c' et on définit le chemin *auto-évitant* $\mathfrak{p} := \text{rev}(\mathfrak{c}) \bullet \vec{e}^{c'} \bullet \mathfrak{c}'$.

Étape b. Découpe, décalage, recollement. On découpe m le long de $\mathfrak{p}$ de c à c' , notant $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{r}$ les copies gauche et droite de $\mathfrak{p}$ dans les cartes obtenues. On recolle $\mathbb{I}_{1 \rightarrow [\mathfrak{p}]-1}$ sur $\mathbb{r}_{2 \rightarrow [\mathfrak{p}]}$, dans le sens où l'on identifie $\mathbb{I}_k$ avec $\mathbb{r}_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq [\mathfrak{p}] - 1$.

Étape c. Marquage. On note $\tilde{m}$ la carte finalement obtenue et on définit comme résultat de la construction le quadruple $(\tilde{m}; \mathbb{I}_{[c]}^+, \mathfrak{r}_1, \text{rev}(\mathfrak{l})_1)$.

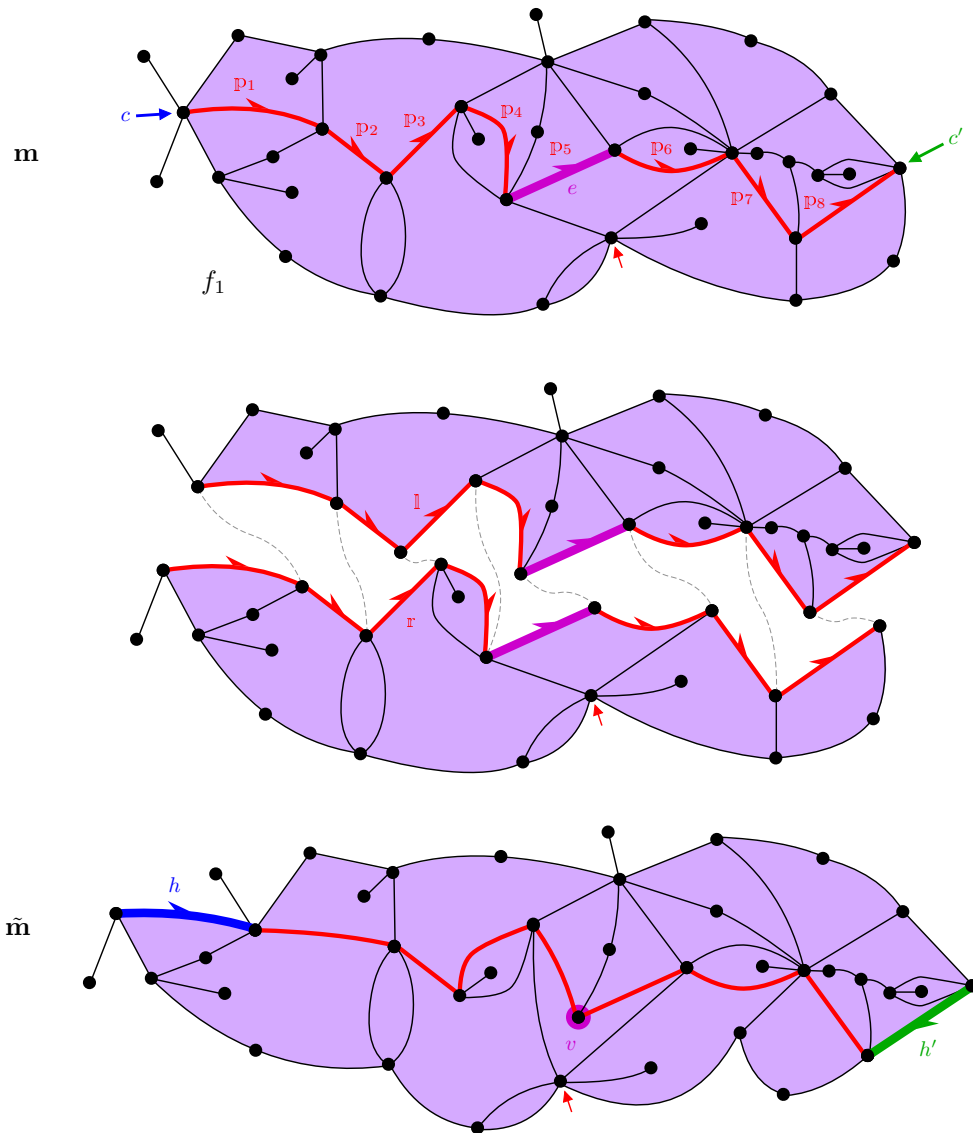


FIGURE 2.37. La construction de $\mathcal{M}$ à $\tilde{\mathcal{M}}$ dans le cas simple. À l'aide des éléments distingués c , c' et e , on définit le chemin $\mathfrak{p}$. Ensuite, on découpe le long de $\mathfrak{p}$ puis on recolle après un léger décalage. On obtient une carte ayant trois éléments distingués, h , h' et v . On a ainsi ajouté 2 coins à la face f_1 non bornée. Sur cette figure, le seul coin marqué représenté est celui de f_1 .

Ajout de deux coins à la même face (cas pincé). Soit $(m; e, c, c') \in \mathcal{M}$ un quadruple pincé.

Étape a. Définition du chemin. On note c la géodésique la plus à droite de $\vec{e}^c$ à c et c' la géodésique la plus à droite de $\vec{e}^{c'}$ à c' et on définit le chemin $p := \text{rev}(c) \bullet \text{rev}(\vec{e}^c) \bullet \vec{e}^{c'} \bullet c'$.

Posant $i \geq 1$ le plus petit entier tel que $c_i \neq c'_i$, on a alors $\{c_i^+, \dots, c_{[c]}^+\} \cap \{c'_i^+, \dots, c'_{[c']}^+\} = \emptyset$ par définition des géodésiques les plus à droite. Le chemin p est ainsi composé du chemin auto-évitant $\text{rev}(c_{i \rightarrow [c]}) \bullet c'_{i \rightarrow [c']}$ avec le chemin auto-évitant $\vec{e}^c \bullet c_{1 \rightarrow i-1}$ (visitée deux fois, d'abord à l'envers puis à l'endroit), greffé soit à sa gauche soit à sa droite.

Étape b. Découpe, décalage, recollement. On découpe m le long de p de c à c' , en contournant la partie pincée. Cela divise encore m en deux sous-cartes avec une copie de p sur leurs bords mais, cette fois, une des copies est un chemin auto-évitant tandis que l'autre copie va et vient le long d'une « chaîne pendante » de i arêtes à un moment donné. On note toujours les copies gauche et droite de p par l et r et on recolle $l_{1 \rightarrow [p]-1}$ sur $r_{2 \rightarrow [p]}$.

Étape c. Marquage. On note $\tilde{m}$ la carte finalement obtenue et on définit comme résultat de la construction le quadruple $(\tilde{m}; v, l_1, \text{rev}(l)_1)$, où v est le sommet à la pointe de la chaîne pendante.

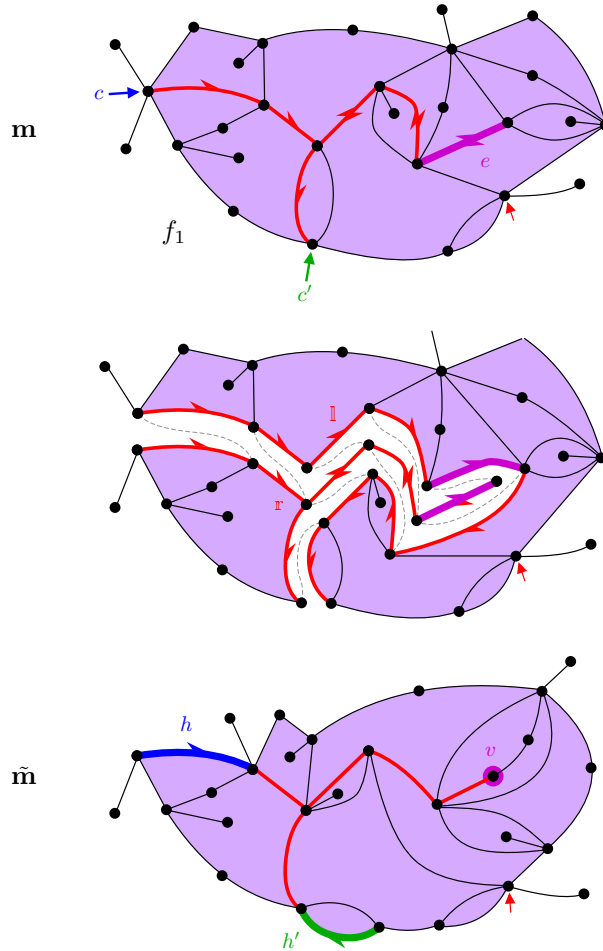


FIGURE 2.38. La construction de $\tilde{\mathcal{M}}$ à $\mathcal{M}$ dans le cas pincé. À l'aide des éléments distingués c, c' et e , on définit le chemin p . Ensuite, on découpe le long de p puis on recolle après un léger décalage, en contournant maintenant sa partie pincée. On obtient une carte ayant trois éléments distingués, h, h' et v .

On passe à la construction inverse, illustrée sur la figure 2.39. Le fait que cette construction est bien l'inverse de la construction précédente deviendra plus clair au cours de la section 2.3.3.

Suppression de deux coins à la même face Soit un quadruple $(\tilde{\mathbf{m}}; v, h, h') \in \tilde{\mathcal{M}}$.

Étape A. Définition du chemin. On considère le coin c_h délimité par h et son prédécesseur dans le contour de la face f_1 de $\tilde{\mathbf{m}}$, et on note $\mathfrak{h}$ la géodésique la plus à gauche de ce coin à v . On définit $c_{h'}$ et $\mathfrak{h}'$ de la même manière avec h' au lieu de h et on pose $\mathfrak{p}' := \mathfrak{h} \bullet \text{rev}(\mathfrak{h}')$.

Comme h s'approche de v , on a $[\mathfrak{h}] \geq 1$ et $\mathfrak{h}_1 = h$. Selon que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ se rencontrent avant d'atteindre v ou non, le chemin $\mathfrak{p}'$ est soit auto-évitant, soit pincé au sens précédent.

Étape B. Découpe, décalage, recollement. On découpe $\tilde{\mathbf{m}}$ le long de $\mathfrak{p}'$ de c_h à $c_{h'}$, notant $\mathfrak{l}'$ et $\mathfrak{r}'$ les copies gauche et droite de $\mathfrak{p}'$ dans les cartes résultantes. On recolle $\mathfrak{l}'_{2 \rightarrow [\mathfrak{p}']}$ sur $\mathfrak{r}'_{1 \rightarrow [\mathfrak{p}'] - 1}$.

Étape C. Marquage. Dans la carte obtenue, $\mathfrak{l}'_1$ et $(\text{rev}(\mathfrak{r}'))_1$ sont des arêtes pendantes. On les supprime et on note respectivement c et c' les coins correspondant. On note $\mathbf{m}$ la carte que l'on obtient, e l'arête correspondant à $\mathfrak{l}'_{[\mathfrak{h}] + 1}$, et on définit comme résultat de la construction le quadruple $(\mathbf{m}; e, c, c')$.

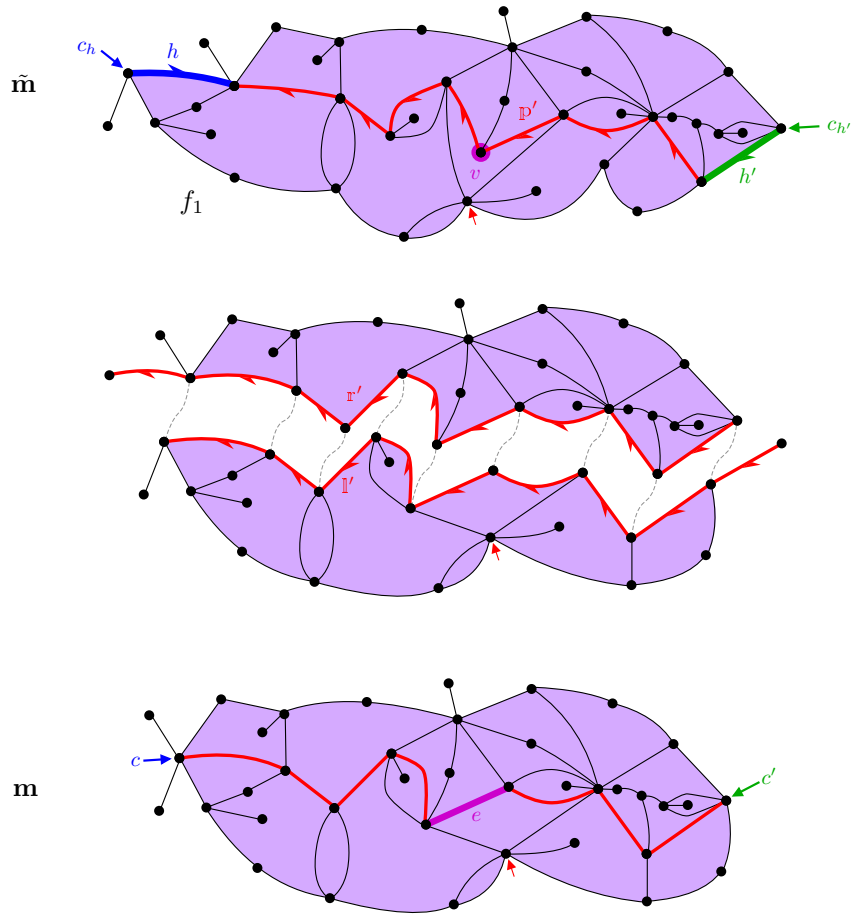
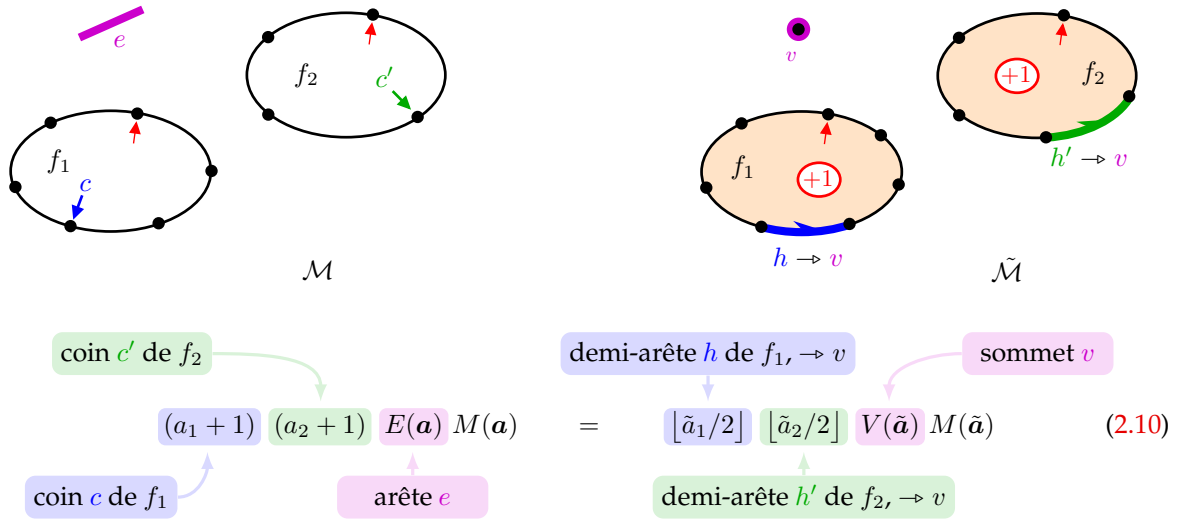


FIGURE 2.39. La construction de $\tilde{\mathcal{M}}$ à $\mathcal{M}$ (dans le cas simple sur cet exemple). À l'aide des éléments distingués h , h' et v , on définit le chemin $\mathfrak{p}'$. Ensuite, on découpe le long de $\mathfrak{p}'$ puis on recolle après un léger décalage, en contournant sa partie pincée le cas échéant. Le sens dans lequel on effectue le décalage est l'inverse du sens utilisé dans la bijection d'ajout de coins. On obtient une carte ayant trois éléments distingués, c , c' et e . On a ainsi supprimé 2 coins à la face f_1 non bornée. Sur cette figure, le seul coin marqué représenté est celui de f_1 .

2.3.2.2 Ajout à deux faces différentes

On utilise maintenant le cadre de la proposition 2.25 : on fixe $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in (2\mathbb{N}^*)^r$ et on définit $\tilde{\mathbf{a}} := (a_1 + 1, a_2 + 1, a_3, \dots, a_r)$. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble¹¹ des quadruples $(\mathbf{m}; e, c, c')$ consistant en une carte plane $\mathbf{m}$ de type $\mathbf{a}$ ayant une arête distinguée e , un coin distingué c dans la face f_1 et un coin distingué c' dans la seconde face. Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ l'ensemble des quadruples $(\tilde{\mathbf{m}}; v, h, h')$ où $\tilde{\mathbf{m}}$ est une carte plane de type $\tilde{\mathbf{a}}$ ayant un sommet distingué v et deux demi-arêtes distinguées h et h' s'en approchant, h étant incidente à f_1 et h' étant incidente à f_2 .



Le cardinal de $\mathcal{M}$ est clairement égal au membre gauche de (2.10) et on voit que celui de $\tilde{\mathcal{M}}$ est égal au membre droit de (2.10) grâce à la proposition 2.30.(ii). Les bijections interprétant la proposition 2.25 sont décrites exactement comme dans la section précédente : voir la figure 2.40. La seule différence est que les chemins $\mathbb{p}$ et $\mathbb{p}'$ ne déconnectent plus les cartes (cf. la remarque 2.29) ; cela n'a aucun effet sur la description des constructions.

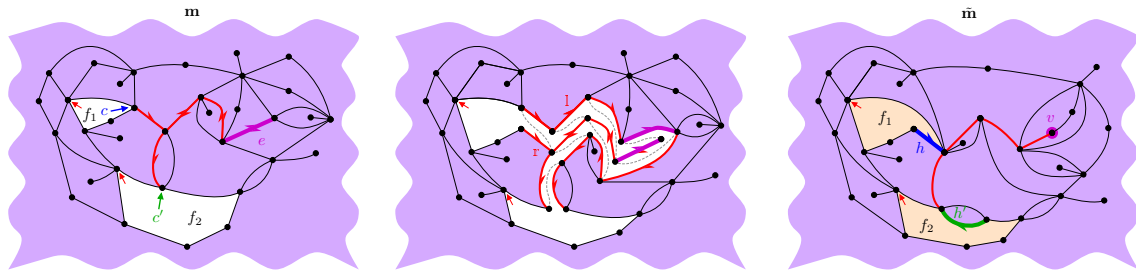


FIGURE 2.40. La construction de $\mathcal{M}$ à $\tilde{\mathcal{M}}$ dans le cas pincé.

2.3.3 Transfert d'un coin

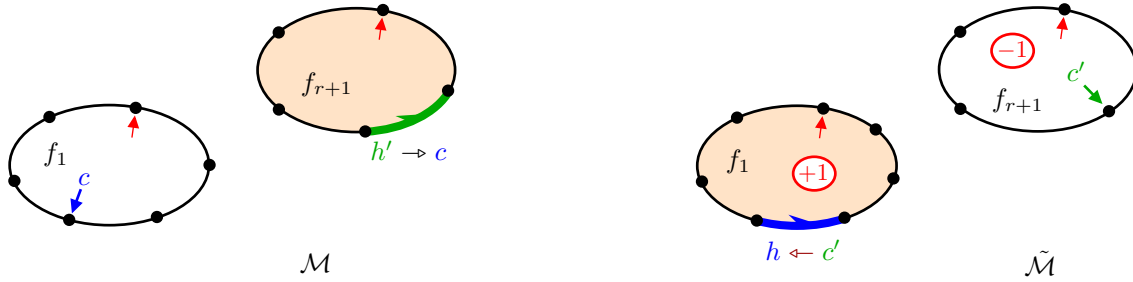
Voyons maintenant comment les bijections précédentes peuvent être décomposées en deux bijections plus élémentaires. Plus précisément, dans nos constructions, nous avons utilisé une arête e et

11. Afin de ne pas surcharger les notations, on note encore $\mathcal{M}$ et $\tilde{\mathcal{M}}$ les ensembles en bijection, bien que leur définition change d'une section à l'autre.

deux coins c et c' (soit de la même face soit de deux faces différentes) et avons construit un chemin reliant les coins par *concaténation* de deux chemins allant de l'arête à chacun des coins. Nous allons voir cette opération comme la composée de deux bijections slit-slide-sew comme suit (voir la figure 2.44 pour une illustration générale du principe). Tout d'abord, on remplace l'arête distinguée e par une $r + 1$ -ième face f_{r+1} de degré 2 en dédoublant l'arête. Ensuite, on applique à la suite deux bijections qui transfèrent chacune un coin de f_{r+1} aux faces contenant c et c' . En conséquence, f_{r+1} disparaît complètement en un sommet. Nous commençons par voir plus en détail ces bijections de transfert et nous reviendrons plus précisément sur cette décomposition lors de la section 2.3.3.3.

2.3.3.1 Transfert à partir d'une face de degré au moins deux

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{r+1})$ un $r + 1$ -uplet d'entiers strictement positifs tel que $a_{r+1} \geq 2$ et, soit toutes les coordonnées sont paires, soit seulement a_{r+1} et une autre coordonnée sont impaires. Soit également $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{r+1}) := (a_1 + 1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1} - 1)$. On interprète les membres de (2.11) comme suit. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des cartes planes de type $\mathbf{a}$ ayant un coin distingué c dans la face f_1 et une demi-arête distinguée h' incidente à la $r + 1$ -ième face et s'approchant de c . On définit $\tilde{\mathcal{M}}$ comme l'ensemble des cartes planes de type $\tilde{\mathbf{a}}$ ayant un coin distingué c' dans f_{r+1} et une demi-arête distinguée h incidente à la face f_1 s'éloignant de c' .



Sur le pictogramme ci-dessus, nous avons choisi de représenter le cas particulier où a_1 est pair et a_{r+1} impair.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{demi-arête } h' \text{ de } f_{r+1}, \rightarrow c \\ \downarrow \\ (a_1 + 1) \quad \lfloor a_{r+1}/2 \rfloor \quad M(\mathbf{a}) \\ \uparrow \\ \text{coin } c \text{ de } f_1 \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{coin } c' \text{ de } f_{r+1} \\ \downarrow \\ \lfloor \tilde{a}_1/2 \rfloor \quad (\tilde{a}_{r+1} + 1) \quad M(\tilde{\mathbf{a}}) \\ \uparrow \\ \text{demi-arête } h \text{ de } f_1, \leftarrow c' \end{array}
 \end{array} \quad (2.11)$$

Chaque carte de type $\mathbf{a}$ a $\lfloor a_{r+1}/2 \rfloor$ demi-arêtes incidentes à la $r + 1$ -ième face qui s'approchent d'un coin donné. Cela vient de la proposition 2.30.(i) lorsque la carte est bipartie, et de la proposition 2.30.(ii) lorsque la carte est quasibipartie, puisque a_{r+1} est impair. Ainsi, le cardinal de $\mathcal{M}$ est le membre gauche de (2.11). Les conditions sur $\mathbf{a}$ impliquent que, soit toutes les coordonnées de $\tilde{\mathbf{a}}$ sont paires, soit seulement $\tilde{a}_1$ et une autre coordonnée sont impaires. Par l'argument précédent, le cardinal de $\tilde{\mathcal{M}}$ est le membre droit de (2.11). Voici les bijections entre $\mathcal{M}$ et $\tilde{\mathcal{M}}$, illustrées sur la figure 2.41.

Transfert d'un coin en s'approchant (par la gauche). Soit $(\mathbf{m}; c, h') \in \mathcal{M}$.

Étape α . Définition du chemin. On considère le coin $c_{h'}$ délimité par h' et son prédécesseur dans le contour de f_{r+1} , et on note $\mathbb{h}'$ la géodésique la plus à gauche de $c_{h'}$ à c .

Étape β . Découpe, décalage, recollement. On découpe $\mathbf{m}$ le long de $\mathbb{h}'$ de $c_{h'}$ à c , notant $\mathbb{l}'$ et $\mathbb{r}'$ les copies gauche et droite de $\mathbb{h}'$ dans la carte résultante. On recolle $\mathbb{l}'_{2 \rightarrow [\mathbb{h}']}$ sur $\mathbb{r}'_{1 \rightarrow [\mathbb{h}]} - 1$.

Étape γ . Marquage. Dans la carte obtenue, on note h la demi-arête $\mathbb{r}'_{[\mathbb{h}]}$, on supprime l'arête pendante $\mathbb{l}'_1$ et on note c' le coin correspondant. Soit $\tilde{\mathbf{m}}$ la carte finale et $\Phi_{\text{left}}(\mathbf{m}; c, h') := (\tilde{\mathbf{m}}; c', h)$.

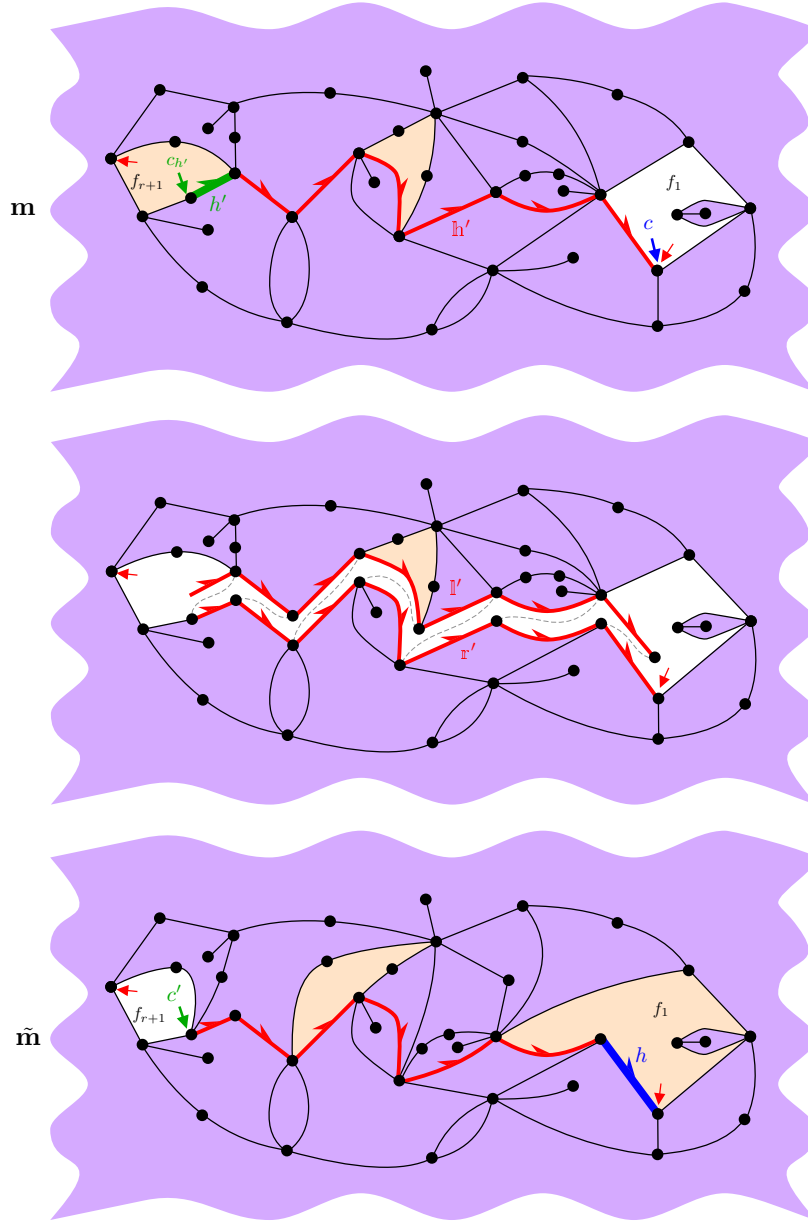


FIGURE 2.41. Bijection de transfert à partir d'une face de degré au moins 2. Le fait que, sur cet exemple, le chemin de décalage touche l'autre face de degré impair est purement fortuit.

Transfert d'un coin en s'éloignant (par la droite). Soit $(\tilde{\mathbf{m}}; c', h) \in \tilde{\mathcal{M}}$.

Étape A. Définition du chemin. On considère le coin c_h délimité par h et son successeur dans le contour de f_1 , et on note $\mathbb{h}$ la géodésique la plus à droite de c_h à c' .

Étape B. Découpe, décalage, recollement. On découpe $\tilde{\mathbf{m}}$ le long de $\mathbb{h}$ de c_h à c' , notant $\mathbb{l}$ et $\mathbb{r}$ les copies gauche et droite de $\mathbb{h}$ dans la carte résultante. On recolle $\mathbb{l}_1 \rightarrow [\mathbb{h}]_{-1}$ sur $\mathbb{r}_2 \rightarrow [\mathbb{h}]$.

Étape F. Marquage. Dans la carte obtenue, on note h' la demi-arête $\text{rev}(\mathbb{l})_1$, on supprime l'arête pendante $\mathbb{r}_1$ et on note c le coin correspondant. Soit $\mathbf{m}$ la carte finale et $\Phi_{\text{right}}(\tilde{\mathbf{m}}; c', h) := (\mathbf{m}; c, h')$.

Théorème 2.31 $\Leftarrow$ *bijections de transfert sans face de degré un* [Bet20] $\Rightarrow$

Les applications $\Phi_{\text{left}} : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ et $\Phi_{\text{right}} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ sont des bijections, inverse l'une de l'autre.

Nous incluons la preuve car elle est très courte et permet de mieux comprendre la nécessité d'utiliser des géodésiques les plus à gauche dans un sens et les plus à droite dans le sens inverse.

Démonstration. Les types des cartes sont clairement les bons. Les applications prennent leurs valeurs dans les ensembles annoncés et sont inverse l'une de l'autre, à condition de vérifier que les chemins de décalage correspondent et que les demi-arêtes distinguées sont orientées comme voulu.

Soit $(\mathbf{m}; c, h') \in \mathcal{M}$ et $(\tilde{\mathbf{m}}; c', h) := \Phi_{\text{left}}(\mathbf{m}; c, h')$. Vérifions que l'image dans $\tilde{\mathbf{m}}$ de $\text{rev}(\mathbf{r}')$ est $\mathbb{h}$. Cela impliquera que h s'éloigne de c' , donc que $(\tilde{\mathbf{m}}; c', h) \in \tilde{\mathcal{M}}$, et que $\Phi_{\text{right}} \circ \Phi_{\text{left}}$ est l'identité sur $\mathcal{M}$.

Avec la figure 2.42 comme aide visuelle, on raisonne par l'absurde en supposant que $\mathbb{h} \neq \text{rev}(\mathbf{r}')$ (on note encore $\text{rev}(\mathbf{r}')$ son image dans $\tilde{\mathbf{m}}$). Alors $\mathbb{h}$ doit quitter le chemin $\text{rev}(\mathbf{r}')$ à un certain point (partant à gauche ou à droite) et y revenir à un autre point (par sa gauche ou par sa droite). On vérifie que ces quatre possibilités contredisent le fait que $\mathbb{h}'$ est la géodésique la plus à gauche de $c_{h'}$ à c .

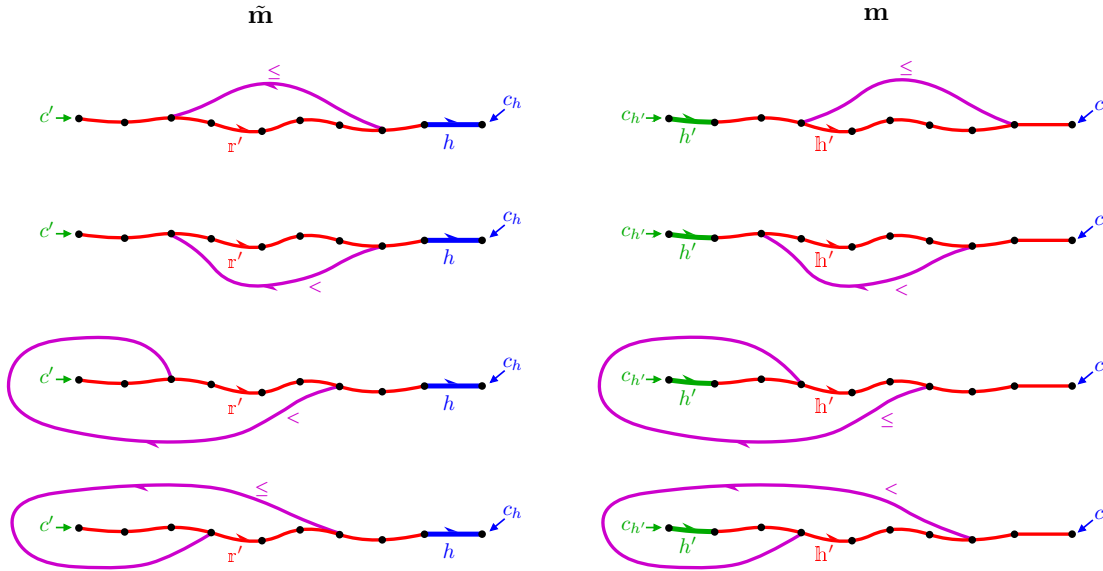
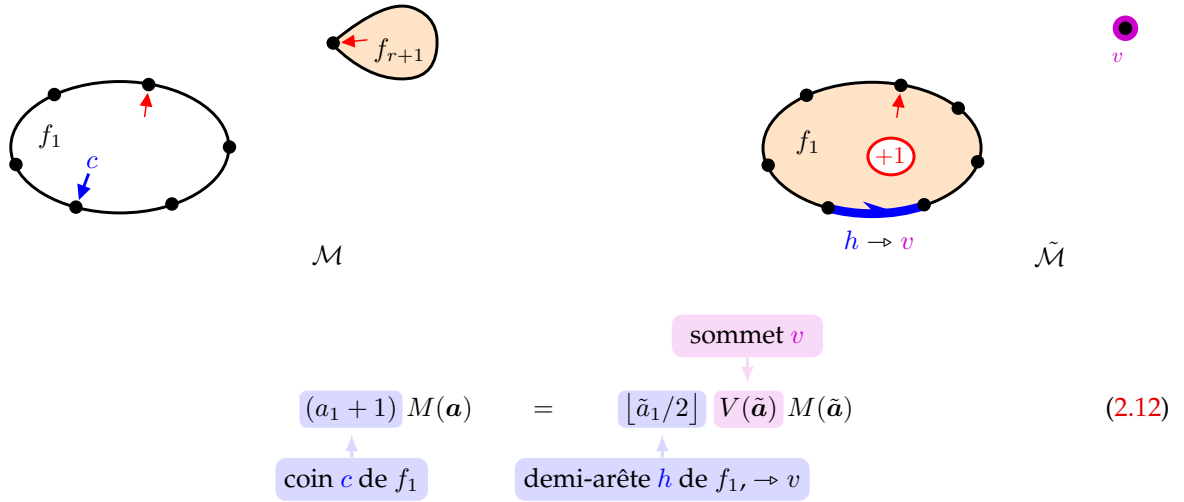


FIGURE 2.42. La géodésique la plus à gauche $\mathbb{h}'$ de $c_{h'}$ à c (dans $\mathbf{m}$) devient la géodésique la plus à droite $\mathbb{h}$ de c_h à c' (dans $\tilde{\mathbf{m}}$). La figure se lit en regardant d'abord à gauche où sont représentées quatre possibilités dans $\tilde{\mathbf{m}}$. L'image de $\mathbb{h}'$ devient $\mathbf{r}'$ dans $\tilde{\mathbf{m}}$ et est représentée en rouge. Si $\mathbb{h} \neq \text{rev}(\mathbf{r}')$, alors il emprunte l'un des chemins violets; le symbole $\leq$ (resp. $<$) indique que la longueur du chemin violet est inférieure (resp. strictement inférieure) à la longueur de la partie contournée. On retrace alors la situation initiale dans $\mathbf{m}$ avant le décalage sur la droite de la figure. On observe que chacune des quatre possibilités contredit la définition de $\mathbb{h}'$.

On montre que Φ_{right} est à valeurs dans $\mathcal{M}$ et que $\Phi_{\text{left}} \circ \Phi_{\text{right}}$ est l'identité sur $\tilde{\mathcal{M}}$ de même. $\square$

2.3.3.2 Transfert à partir d'une face de degré un

Passons maintenant à la proposition 2.27. Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r, 1)$ un $r+1$ -uplet d'entiers strictement positifs avec deux coordonnées impaires et soit $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r) := (a_1 + 1, a_2, \dots, a_r)$. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des cartes planes de type $\mathbf{a}$ ayant un coin distingué dans la face f_1 et $\tilde{\mathcal{M}}$ l'ensemble des cartes planes de type $\tilde{\mathbf{a}}$ ayant un sommet distingué v et une demi-arête distinguée incidente à la face f_1 s'approchant de v .



Les constructions sont très similaires aux précédentes ; voir la figure 2.43.

Transfert d'un coin d'une face de degré un (par la droite). Soit $(\mathbf{m}; c) \in \mathcal{M}$.

Étape A. Définition du chemin. Soit $\mathbb{p}$ la géodésique la plus à droite de l'unique coin de f_{r+1} à c .

Étape B. Découpe, décalage, recollement. On découpe $\mathbf{m}$ le long de $\mathbb{p}$ de l'unique coin de f_{r+1} à c , notant $\mathbb{l}$ et $\mathbb{r}$ les copies gauche et droite de $\mathbb{p}$ dans la carte résultante. On définit de plus $\mathbb{l}_0$ comme l'inverse de l'unique demi-arête incidente à f_{r+1} . On recolle $\mathbb{l}_{0 \rightarrow [\mathbb{p}]-1}$ sur $\mathbb{r}_{1 \rightarrow [\mathbb{p}]}$, supprimant ainsi f_{r+1} .

Étape Γ. Marquage. Dans la carte obtenue, on note h la demi-arête $\text{rev}(\mathbb{l})_1$ et v le sommet $\mathbb{l}_0^-$. On note alors $\tilde{\mathbf{m}}$ la carte finale et on définit $\Phi_{\text{right}}^1(\mathbf{m}; c) := (\tilde{\mathbf{m}}; v, h)$.

Transfert d'un coin en s'approchant (par la gauche). Soit $(\tilde{\mathbf{m}}; v, h) \in \tilde{\mathcal{M}}$.

Étape α. Définition du chemin. On considère le coin c_h délimité par h et son prédécesseur dans le contour de f_1 , et on note $\mathbb{p}'$ la géodésique la plus à gauche de c_h à v .

Étape β. Découpe, décalage, recollement. On découpe $\tilde{\mathbf{m}}$ le long de $\mathbb{p}'$ à partir de c_h et on s'arrête à v , sans déconnecter la carte au niveau de v . On note $\mathbb{l}'$ et $\mathbb{r}'$ les copies gauche et droite de $\mathbb{p}'$ dans la carte résultante. On recolle $\mathbb{l}'_{2 \rightarrow [\mathbb{p}']}$ sur $\mathbb{r}'_{1 \rightarrow [\mathbb{p}']-1}$, créant ainsi une nouvelle face de degré 1, que l'on nomme f_{r+1} .

Étape γ. Marquage. Dans la carte obtenue, on supprime l'arête pendante $\mathbb{l}'_1$ et on note c le coin correspondant. On note $\mathbf{m}$ la carte finale et on définit $\Phi_{\text{left}}^1(\tilde{\mathbf{m}}; v, h) := (\mathbf{m}; c)$.

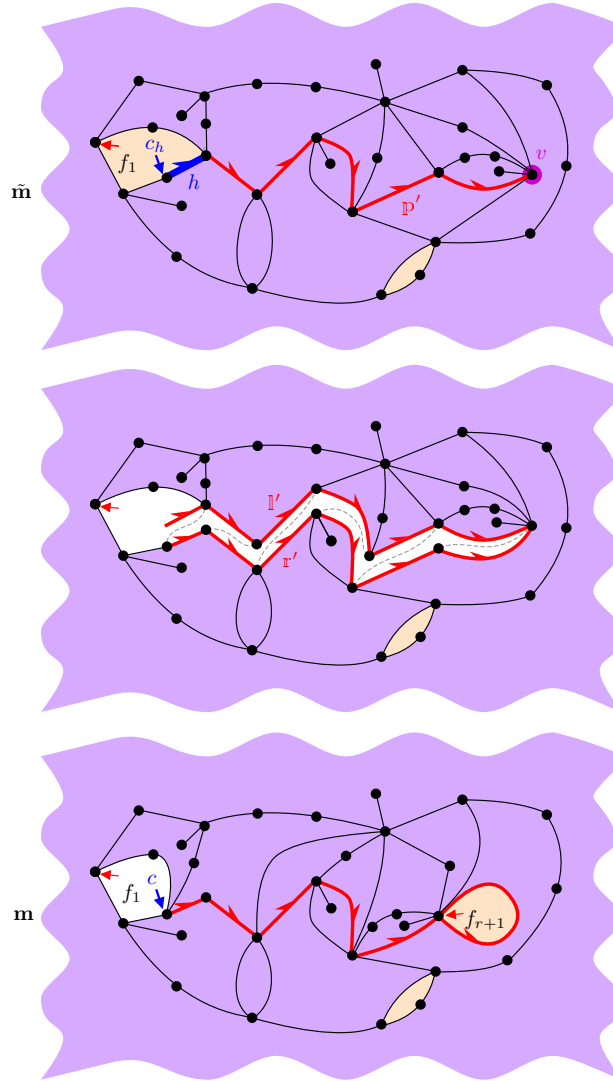


FIGURE 2.43. Les bijections de transfert dans le cas d'une face de degré 1.

Théorème 2.32 $\Leftarrow$ bijections de transfert avec une face de degré un [Bet20] $\Rightarrow$

Les applications $\Phi_{\text{right}}^1 : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ et $\Phi_{\text{left}}^1 : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ sont des bijections, inverse l'une de l'autre.

2.3.3.3 Décomposition des bijections d'ajout / suppression de coins en bijections de transfert

Pour terminer, expliquons sur les figures 2.44 et 2.45 comment les bijections d'ajout / suppression de coins peuvent s'obtenir comme composées de deux bijections de transfert. On considère un r -uplet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$ d'entiers pairs strictement positifs et une carte $\mathbf{m}$ de type $\mathbf{a}$ avec une arête distinguée e et deux coins distingués c et c' (soit de la même face soit de deux faces différentes). On définit d'abord la carte $\mathbf{m}'$ de type $(a_1, \dots, a_r, 2)$ en remplaçant l'arête distinguée e par une $r + 1$ -ième face f_{r+1} de degré 2 en dédoublant l'arête e ; le coin marqué de cette face est choisi arbitrairement. Soit ensuite h'' l'unique demi-arête incidente à f_{r+1} qui s'éloigne de c . On définit $(\mathbf{m}''; c'', h) := \Phi_{\text{right}}^1(\mathbf{m}'; c, h'')$, tout en gardant la trace de c' dans la carte résultante. La carte $\mathbf{m}''$ est de type $(a_1 + 1, a_2, \dots, a_r, 1)$ et on

définit finalement $(\tilde{\mathbf{m}}; v, h') := \Phi_{\text{right}}^1(\mathbf{m}''; c')$, tout en gardant la trace de h dans la carte résultante.

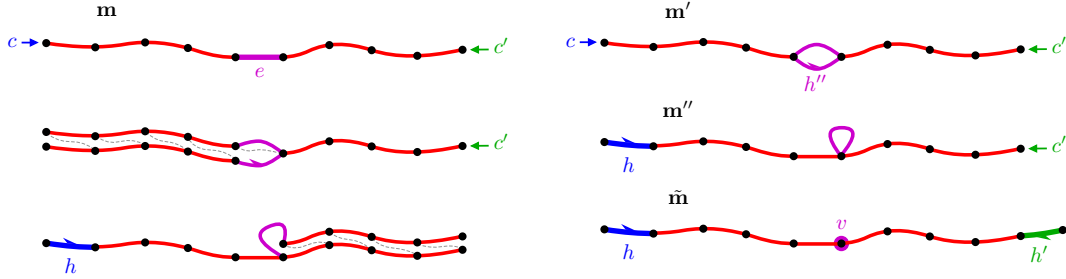


FIGURE 2.44. À lire de haut en bas. Décomposition d'une bijection d'ajout / suppression en deux bijections de transfert dans le cas simple. On part d'une carte avec deux coins c et c' et une arête e . On remplace e par une face supplémentaire de degré 2. On transfère un coin de cette nouvelle face vers c , créant ainsi une arête orientée h . Enfin, on transfère le coin restant de la nouvelle face vers c' ; la face devient un sommet v et on crée une arête orientée h' . On a ainsi ajouté 1 degré au voisinage de chaque coin c et c' .

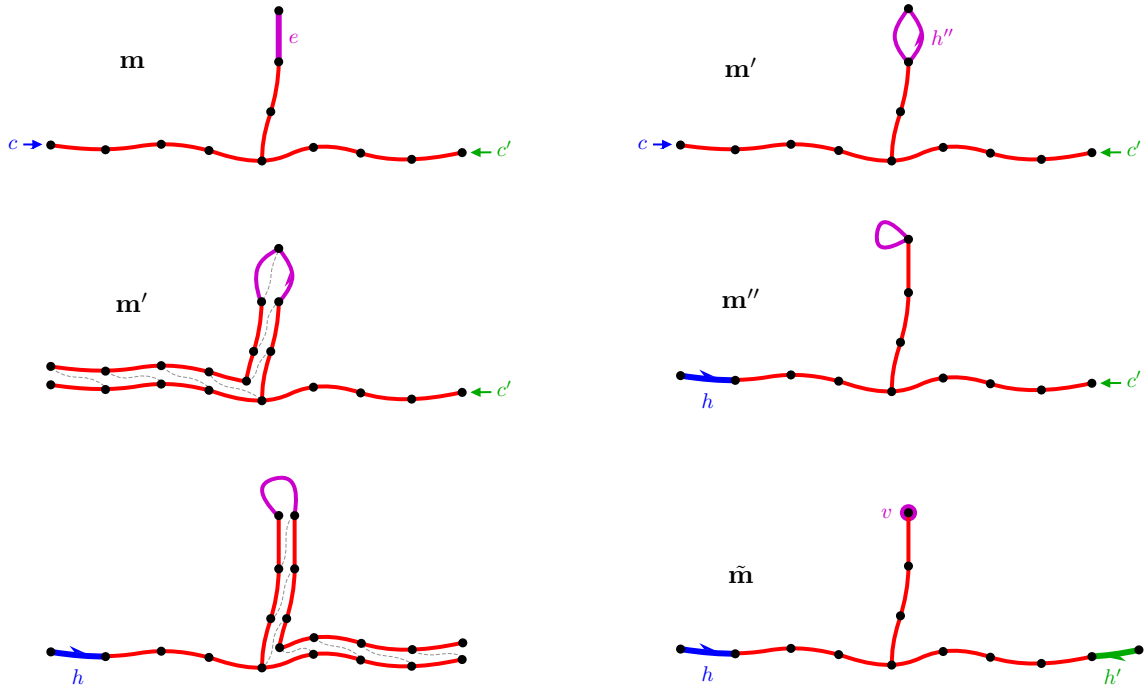


FIGURE 2.45. Décomposition d'une bijection d'ajout / suppression en deux bijections de transfert dans le cas pincé. À lire de haut en bas.

Nous prétendons que $(\tilde{\mathbf{m}}; v, h, h')$ est le résultat de la bijection d'ajout / suppression de l'une des sections 2.3.3.1 ou 2.3.3.2. Dans $\mathbf{m}$, la bijection d'ajout / suppression utilise deux géodésiques, l'une dirigée vers c et l'autre dirigée vers c' . Clairement, dans l'application de Φ_{right} à $(\mathbf{m}'; c, h'')$, le chemin de décalage dans $\mathbf{m}'$ correspond à la géodésique dirigée vers c . Il suffit alors de vérifier que l'image dans $\mathbf{m}''$ de la géodésique dirigée vers c' correspond au chemin de décalage utilisé par Φ_{right}^1 . Cela provient du fait que l'application Φ_{right} ne modifie la carte que le long de la géodésique dirigée vers c , qui, par définition, ne peut traverser la géodésique dirigée vers c' .

Bibliographie

- [AB13] Jan Ambjørn and Timothy G. Budd. Trees and spatial topology change in causal dynamical triangulations. *J. Phys. A*, 46(31) :315201, 33, 2013.
- [ABA17] Louigi Addario-Berry and Marie Albenque. The scaling limit of random simple triangulations and random simple quadrangulations. *Ann. Probab.*, 45(5) :2767–2825, 2017.
- [ABA20] Louigi Addario-Berry and Marie Albenque. Convergence of odd-angulations via symmetrization of labeled trees. *Preprint*, [arXiv:1904.04786](https://arxiv.org/abs/1904.04786), 2020.
- [Abr16] Céline Abraham. Rescaled bipartite planar maps converge to the Brownian map. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 52(2) :575–595, 2016.
- [ADJ97] Jan Ambjørn, Bergfinnur Durhuus, and Thordur Jonsson. *Quantum geometry*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. A statistical field theory approach.
- [AHS20] Marie Albenque, Nina Holden, and Xin Sun. Scaling limit of triangulations of polygons. *Electron. J. Probab.*, 25 :Paper No. 135, 43, 2020.
- [AKM17] Omer Angel, Brett Kolesnik, and Grégory Miermont. Stability of geodesics in the Brownian map. *Ann. Probab.*, 45(5) :3451–3479, 2017.
- [Alb20] Marie Albenque. *Maps : at the interface between combinatorics and probability*. Mémoire d’habilitation à diriger des recherches, Université de Paris, 2020.
- [Ald91] David Aldous. The continuum random tree. I. *Ann. Probab.*, 19(1) :1–28, 1991.
- [Ald93] David Aldous. The continuum random tree. III. *Ann. Probab.*, 21(1) :248–289, 1993.
- [ALG18] Céline Abraham and Jean-François Le Gall. Excursion theory for Brownian motion indexed by the Brownian tree. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 20(12) :2951–3016, 2018.
- [AP15] Marie Albenque and Dominique Poulalhon. A generic method for bijections between blossoming trees and planar maps. *Electron. J. Combin.*, 22(2) :Paper 2.38, 44, 2015.
- [BBI01] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [BC86] Edward A. Bender and E. Rodney Canfield. The asymptotic number of rooted maps on a surface. *J. Combin. Theory Ser. A*, 43(2) :244–257, 1986.
- [BC91] Edward A. Bender and E. Rodney Canfield. The number of rooted maps on an orientable surface. *J. Combin. Theory Ser. B*, 53(2) :293–299, 1991.

- [BCF14] Olivier Bernardi, Gwendal Collet, and Éric Fusy. On the distance-profile of random rooted plane graphs. In *Proceedings of the 25th International Conference on Probabilistic, Combinatorial and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., BA, pages 37–48. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2014.
- [BCFS21] Jérémie Bettinelli, Nicolas Curien, Luis Fredes, and Avelio Sepúlveda. Nonbijective scaling limit of maps via restriction. *Preprint*, [arXiv:2104.12716](https://arxiv.org/abs/2104.12716), 2021.
- [BCP03] Jean Bertoin, Loïc Chaumont, and Jim Pitman. Path transformations of first passage bridges. *Electron. Comm. Probab.*, 8 :155–166 (electronic), 2003.
- [BCR93] Edward A. Bender, E. Rodney Canfield, and L. Bruce Richmond. The asymptotic number of rooted maps on a surface. II. Enumeration by vertices and faces. *J. Combin. Theory Ser. A*, 63(2) :318–329, 1993.
- [BDG02] Jérémie Bouttier, Philippe Di Francesco, and Emmanuel Guitter. Census of planar maps : from the one-matrix model solution to a combinatorial proof. *Nuclear Phys. B*, 645(3) :477–499, 2002.
- [BDG04] Jérémie Bouttier, Philippe Di Francesco, and Emmanuel Guitter. Planar maps as labeled mobiles. *Electron. J. Combin.*, 11(1) :Research Paper 69, 27 pp. (electronic), 2004.
- [Ben91] Edward A. Bender. Some unsolved problems in map enumeration. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 3 :51–56, 1991.
- [Ber07] Olivier Bernardi. Bijective counting of tree-rooted maps and shuffles of parenthesis systems. *Electron. J. Combin.*, 14(1) :Research Paper 9, 36, 2007.
- [Ber17] Nathanaël Berestycki. An elementary approach to Gaussian multiplicative chaos. *Electron. Commun. Probab.*, 22 :Paper No. 27, 12, 2017.
- [Bet10] Jérémie Bettinelli. Scaling limits for random quadrangulations of positive genus. *Electron. J. Probab.*, 15 :no. 52, 1594–1644, 2010.
- [Bet12] Jérémie Bettinelli. The topology of scaling limits of positive genus random quadrangulations. *Ann. Probab.*, 40(5) :1897–1944, 2012.
- [Bet14] Jérémie Bettinelli. Increasing forests and quadrangulations via a bijective approach. *J. Combin. Theory Ser. A*, 122(0) :107–125, 2014.
- [Bet15] Jérémie Bettinelli. Scaling limit of random planar quadrangulations with a boundary. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 51(2) :432–477, 2015.
- [Bet16a] Jérémie Bettinelli. Geodesics in Brownian surfaces (Brownian maps). *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 52(2) :612–646, 2016.
- [Bet16b] Jérémie Bettinelli. A simple explicit bijection between $(n, 2)$ -Gog and Magog trapezoids. *Sém. Lothar. Combin.*, 75 :Art. B75e, 1–9, 2016.
- [Bet18] Jérémie Bettinelli. Convergence of uniform noncrossing partitions toward the Brownian triangulation. *Sém. Lothar. Combin.*, 80B :Art. 38, 12, 2018.
- [Bet20] Jérémie Bettinelli. Slit-slide-sew bijections for bipartite and quasibipartite plane maps. *Electron. J. Combin.*, 27(3) :Paper 3.4, 23, 2020.
- [Bet22] Jérémie Bettinelli. A bijection for nonorientable general maps. *Ann. Inst. Henri Poincaré D*, 2022.

-
- [BF12a] Olivier Bernardi and Éric Fusy. A bijection for triangulations, quadrangulations, pentagulations, etc. *J. Combin. Theory Ser. A*, 119(1) :218–244, 2012.
 - [BF12b] Olivier Bernardi and Éric Fusy. Unified bijections for maps with prescribed degrees and girth. *J. Combin. Theory Ser. A*, 119(6) :1351–1387, 2012.
 - [BFG14] Jérémie Bouttier, Éric Fusy, and Emmanuel Guitter. On the two-point function of general planar maps and hypermaps. *Ann. Inst. Henri Poincaré D*, 1(3) :265–306, 2014.
 - [BFMR16] Jérémie Bettinelli, Éric Fusy, Cécile Mailler, and Lucas Randazzo. A bijective study of Basketball walks. *Sém. Lothar. Combin.*, 77 :Art. B77a, 1–24, 2016.
 - [BG08] Jérémie Bouttier and Emmanuel Guitter. The three-point function of planar quadrangulations. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2008(7) :P07020, 2008.
 - [BHL19] Vincent Beffara, Cong Bang Huynh, and Benjamin Lévêque. Scaling limits for random triangulations on the torus. *Preprint*, [arXiv:1905.01873](https://arxiv.org/abs/1905.01873), 2019.
 - [Bil68] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
 - [BIPZ78] Édouard Brézin, Claude Itzykson, Giorgio Parisi, and Jean-Bernard Zuber. Planar diagrams. *Comm. Math. Phys.*, 59(1) :35–51, 1978.
 - [BJM14] Jérémie Bettinelli, Emmanuel Jacob, and Grégory Miermont. The scaling limit of uniform random plane maps, *via* the Ambjørn–Budd bijection. *Electron. J. Probab.*, 19 :no. 74, 1–16, 2014.
 - [BLG13] Johel Beltran and Jean-François Le Gall. Quadrangulations with no pendant vertices. *Bernoulli*, 19(4) :1150–1175, 2013.
 - [BM17] Jérémie Bettinelli and Grégory Miermont. Compact Brownian surfaces I. Brownian disks. *Probab. Theory Related Fields*, 167 :555–614, 2017.
 - [BM22] Jérémie Bettinelli and Grégory Miermont. Compact Brownian surfaces II. The general case. *In preparation*, 2022.
 - [BMR19] Erich Baur, Grégory Miermont, and Gourab Ray. Classification of scaling limits of uniform quadrangulations with a boundary. *Ann. Probab.*, 47(6) :3397–3477, 2019.
 - [BMS02] Mireille Bousquet-Mélou and Gilles Schaeffer. The degree distribution in bipartite planar maps : applications to the Ising model. *Preprint*, [arXiv:math/0211070](https://arxiv.org/abs/math/0211070), 2002.
 - [Bou05] Jérémie Bouttier. *Physique statistique des surfaces aléatoires et combinatoire bijective des cartes planaires*. PhD thesis, Université Paris VI, 2005.
 - [Car14] S. R. Carrell. The non-orientable map asymptotics constant p_g . *Preprint*, [arXiv:1406.1760](https://arxiv.org/abs/1406.1760), 2014.
 - [CD17] Guillaume Chapuy and Maciej Dołęga. A bijection for rooted maps on general surfaces. *J. Combin. Theory Ser. A*, 145 :252–307, 2017.
 - [CF14] Gwendal Collet and Éric Fusy. A simple formula for the series of constellations and quasi-constellations with boundaries. *Electron. J. Combin.*, 21(2) :Paper 2.9, 27, 2014.
 - [Cha09] Guillaume Chapuy. Asymptotic enumeration of constellations and related families of maps on orientable surfaces. *Combin. Probab. Comput.*, 18(4) :477–516, 2009.
 - [Cha19] Guillaume Chapuy. On tessellations of random maps and the t_g -recurrence. *Probab. Theory Related Fields*, 174(1-2) :477–500, 2019.

- [CLG13] Nicolas Curien and Jean-François Le Gall. The Brownian plane. *J. Theor. Probab.*, 2013.
- [CLG19] Nicolas Curien and Jean-François Le Gall. First-passage percolation and local modifications of distances in random triangulations. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 52(3) :631–701, 2019.
- [CMS09] Guillaume Chapuy, Michel Marcus, and Gilles Schaeffer. A bijection for rooted maps on orientable surfaces. *SIAM J. Discrete Math.*, 23(3) :1587–1611, 2009.
- [Cor75] Robert Cori. *Un code pour les graphes planaires et ses applications*. Société Mathématique de France, Paris, 1975. With an English abstract, *Astérisque*, No. 27.
- [Cor76] Robert Cori. Planarité et algébricité. In *Journées algorithmiques (École Norm. Sup., Paris, 1975)*, pages 33–44. *Astérisque*, No. 38–39. Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [CS04] Philippe Chassaing and Gilles Schaeffer. Random planar lattices and integrated super-Brownian excursion. *Probab. Theory Related Fields*, 128(2) :161–212, 2004.
- [CV81] Robert Cori and Bernard Vauquelin. Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.*, 33(5) :1023–1042, 1981.
- [DGL17] Vincent Despré, Daniel Gonçalves, and Benjamin Lévêque. Encoding toroidal triangulations. *Discrete Comput. Geom.*, 57(3) :507–544, 2017.
- [DKRV16] François David, Antti Kupiainen, Rémi Rhodes, and Vincent Vargas. Liouville quantum gravity on the Riemann sphere. *Comm. Math. Phys.*, 342(3) :869–907, 2016.
- [DLG02] Thomas Duquesne and Jean-François Le Gall. Random trees, Lévy processes and spatial branching processes. *Astérisque*, 281 :vi+147, 2002.
- [DS11] Bertrand Duplantier and Scott Sheffield. Liouville quantum gravity and KPZ. *Invent. Math.*, 185(2) :333–393, 2011.
- [Gao91] Zhicheng Gao. The number of rooted triangular maps on a surface. *J. Combin. Theory Ser. B*, 52(2) :236–249, 1991.
- [Gao93] Zhicheng Gao. A pattern for the asymptotic number of rooted maps on surfaces. *J. Combin. Theory Ser. A*, 64(2) :246–264, 1993.
- [GHS19] Ewain Gwynne, Nina Holden, and Xin Sun. Mating of trees for random planar maps and Liouville quantum gravity : a survey. *Preprint*, [arXiv:1910.04713](https://arxiv.org/abs/1910.04713), 2019.
- [GLM08] Stavros Garoufalidis, Thang T. Q. Lê, and Marcos Mariño. Analyticity of the free energy of a closed 3-manifold. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 4 :Paper 080, 20, 2008.
- [Gro99] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, volume 152 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.
- [HS21] Nina Holden and Xin Sun. Convergence of uniform triangulations under the Cardy embedding. *Preprint*, [arXiv:1905.13207](https://arxiv.org/abs/1905.13207), 2021.
- [Kah85] Jean-Pierre Kahane. Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec*, 9(2) :105–150, 1985.
- [Lep19] Mathias Lepoutre. Blossoming bijection for higher-genus maps. *J. Combin. Theory Ser. A*, 165 :187–224, 2019.
- [LG99] Jean-François Le Gall. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [LG07] Jean-François Le Gall. The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Invent. Math.*, 169(3) :621–670, 2007.

-
- [LG10] Jean-François Le Gall. Geodesics in large planar maps and in the Brownian map. *Acta Math.*, 205(2) :287–360, 2010.
 - [LG13] Jean-François Le Gall. Uniqueness and universality of the Brownian map. *Ann. Probab.*, 41(4) :2880–2960, 2013.
 - [LG14] Jean-François Le Gall. Random geometry on the sphere. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. 1*, pages 421–442. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.
 - [LG19] Jean-François Le Gall. Brownian disks and the Brownian snake. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 55(1) :237–313, 2019.
 - [LG20] Jean-François Le Gall. The Brownian disk viewed from a boundary point. *Preprint*, [arXiv:2006.11050](#), 2020.
 - [LG22] Jean-François Le Gall. Geodesic stars in random geometry. *Ann. Probab.*, 50(3) :1013–1058, 2022.
 - [LGM11] Jean-François Le Gall and Grégory Miermont. Scaling limits of random planar maps with large faces. *Ann. Probab.*, 39(1) :1–69, 2011.
 - [LGM12] Jean-François Le Gall and Grégory Miermont. Scaling limits of random trees and planar maps. In *Probability and statistical physics in two and more dimensions*, volume 15 of *Clay Math. Proc.*, pages 155–211. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
 - [LGP08] Jean-François Le Gall and Frédéric Paulin. Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere. *Geom. Funct. Anal.*, 18(3) :893–918, 2008.
 - [LZ04] Sergei K. Lando and Alexander K. Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications*, volume 141 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. With an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II.
 - [Mar20] Cyril Marzouk. On Brownian limits of planar trees and maps with a prescribed degree sequence. *Preprint*, [arXiv:1903.06138](#), 2020.
 - [Mie08] Grégory Miermont. On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations. *Electron. Commun. Probab.*, 13 :248–257, 2008.
 - [Mie09] Grégory Miermont. Tessellations of random maps of arbitrary genus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(5) :725–781, 2009.
 - [Mie13] Grégory Miermont. The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations. *Acta Math.*, 210(2) :319–401, 2013.
 - [Mie14] Grégory Miermont. Aspects of random maps. *Lecture notes of the 2014 Saint-Flour Probability Summer School*, preliminary notes available at the author’s webpage, 2014.
 - [MM06] Jean-François Marckert and Abdelkader Mokraddem. Limit of normalized quadrangulations : the Brownian map. *Ann. Probab.*, 34(6) :2144–2202, 2006.
 - [MM07] Jean-François Marckert and Grégory Miermont. Invariance principles for random bipartite planar maps. *Ann. Probab.*, 35(5) :1642–1705, 2007.
 - [MQ21] Jason Miller and Wei Qian. Geodesics in the Brownian map : Strong confluence and geometric structure. *Preprint*, [arXiv:2008.02242](#), 2021.
 - [MS20] Jason Miller and Scott Sheffield. Liouville quantum gravity and the Brownian map I : the $\text{QLE}(8/3, 0)$ metric. *Invent. Math.*, 219(1) :75–152, 2020.

- [MS21a] Jason Miller and Scott Sheffield. An axiomatic characterization of the Brownian map. *J. Éc. polytech. Math.*, 8 :609–731, 2021.
- [MS21b] Jason Miller and Scott Sheffield. Liouville quantum gravity and the Brownian map II : geodesics and continuity of the embedding. *Preprint*, [arXiv:1605.03563](https://arxiv.org/abs/1605.03563), 2021.
- [MS21c] Jason Miller and Scott Sheffield. Liouville quantum gravity and the Brownian map III : the conformal structure is determined. *Probab. Theory Related Fields*, 179(3-4) :1183–1211, 2021.
- [MT01] Bojan Mohar and Carsten Thomassen. *Graphs on surfaces*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2001.
- [Pol81] Alexander M. Polyakov. Quantum geometry of bosonic strings. *Phys. Lett. B*, 103(3) :207–210, 1981.
- [PS06] Dominique Poulalhon and Gilles Schaeffer. Optimal coding and sampling of triangulations. *Algorithmica*, 46(3-4) :505–527, 2006.
- [RY99] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [Sch97] Gilles Schaeffer. Bijective census and random generation of Eulerian planar maps with prescribed vertex degrees. *Electron. J. Combin.*, 4(1) :Research Paper 20, 14 pp. (electronic), 1997.
- [Sch98] Gilles Schaeffer. *Conjugaison d’arbres et cartes combinatoires aléatoires*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, 1998.
- [Sch07] Oded Schramm. Conformally invariant scaling limits : an overview and a collection of problems. In *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 513–543. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [tH74] Gerardus ’t Hooft. A planar diagram theory for strong interactions. *Nuclear Physics B*, 72(3) :461–473, 1974.
- [Tut62a] William T. Tutte. A census of Hamiltonian polygons. *Canad. J. Math.*, 14 :402–417, 1962.
- [Tut62b] William T. Tutte. A census of planar triangulations. *Canad. J. Math.*, 14 :21–38, 1962.
- [Tut62c] William T. Tutte. A census of slicings. *Canad. J. Math.*, 14 :708–722, 1962.
- [Tut63] William T. Tutte. A census of planar maps. *Canad. J. Math.*, 15 :249–271, 1963.
- [WL72a] Timothy R. S. Walsh and Alfred B. Lehman. Counting rooted maps by genus. I. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 13 :192–218, 1972.
- [WL72b] Timothy R. S. Walsh and Alfred B. Lehman. Counting rooted maps by genus. II. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 13 :122–141, 1972.
- [WL75] Timothy R. S. Walsh and Alfred B. Lehman. Counting rooted maps by genus. III : Nonseparable maps. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 18 :222–259, 1975.