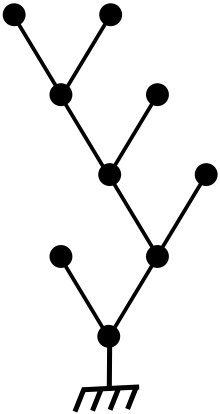
Croissance de cartes planaires biparties par une approche bijective

Jérémie BETTINELLI

8 janvier 2016

Arbres plans binaires



$\mathcal{A}_n$: ensemble des arbres plans binaires enracinés à

- n nœuds,
- $n+1$ feuilles,
- $2n+1$ arêtes (en comptant la racine).

$$|\mathcal{A}_n| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

$$2 \quad (2n+1)\,|\mathcal{A}_n| = (n+2)\,|\mathcal{A}_{n+1}|$$

Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

$$2 \quad \underbrace{(2n+1)}_{\text{arête}} |\mathcal{A}_n| = (n+2)\,|\mathcal{A}_{n+1}|$$

Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

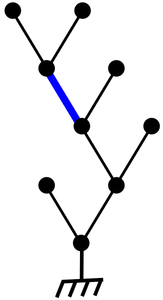
$$2 \quad \underbrace{(2n+1)}_{\text{arête}} |\mathcal{A}_n| = \underbrace{(n+2)}_{\text{feuille}} |\mathcal{A}_{n+1}|$$

Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

$$\underbrace{2}_{\text{marque}}\ \underbrace{(2n+1)}_{\text{arête}}\,|\mathcal{A}_n| = \underbrace{(n+2)}_{\text{feuille}}\,|\mathcal{A}_{n+1}|$$

Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

$$\underbrace{2}_{\text{marque}}\ \underbrace{(2n+1)}_{\text{arête}}|\mathcal{A}_n| = \underbrace{(n+2)}_{\text{feuille}}|\mathcal{A}_{n+1}|$$

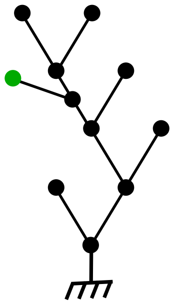


gauche

- On part d'un arbre binaire avec une arête marquée et une marque gauche ou droite

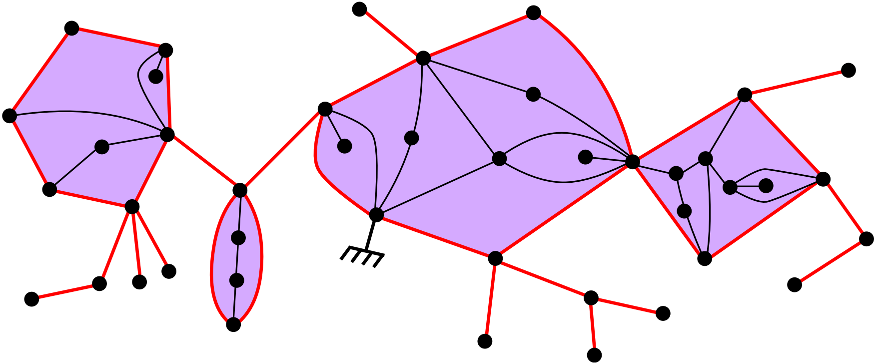
Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

$$\underbrace{2}_{\text{marque}}\ \underbrace{(2n+1)}_{\text{arête}}|\mathcal{A}_n| = \underbrace{(n+2)}_{\text{feuille}}|\mathcal{A}_{n+1}|$$



- On part d'un arbre binaire avec une arête marquée et une marque gauche ou droite
- On ajoute à gauche ou à droite de l'arête une nouvelle arête et on marque la feuille à l'extrémité

Quadrangulations à bord



Quadrangulation à bord : carte plannaire dont toutes les faces sauf la face contenant la racine sont de degré 4.

Caractéristiques

Soit $\mathcal{Q}_{n,p}$ l'ensemble des quadrangulations à bord ayant

- n faces internes,
- $2p$ arêtes orientées sur le bord,

et donc, par la relation d'Euler,

- $n + p + 1$ sommets,
- $2n + p$ arêtes.

Identités combinatoires

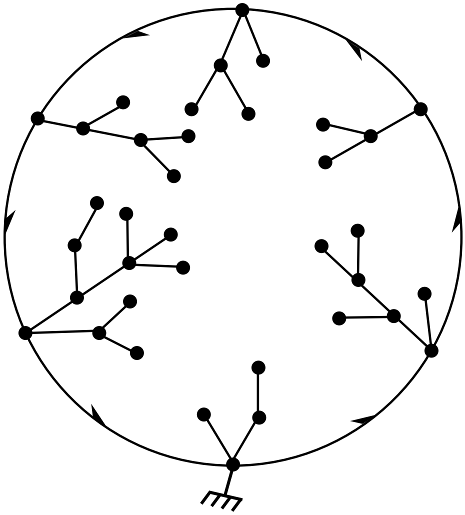
On peut montrer de diverses façons que

$$|\mathcal{Q}_{n,p}| = \frac{3^n\,(2p)!\,(2n+p-1)!}{p!\,(p-1)!\,(n+p+1)!}$$

On en déduit les identités suivantes :

- $(2p+1)(2p+2)(2n+p)\,|\mathcal{Q}_{n,p}| = p\,(p+1)(n+p+2)\,|\mathcal{Q}_{n,p+1}|$
- $3(2n+p)(2n+p+1)\,|\mathcal{Q}_{n,p}| = (n+1)(n+p+2)\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}|$

Échauffement : forêts



$\mathcal{F}_{n,p}$: ensemble des forêts à

- n arêtes,
- p arbres,
- $n+p$ sommets,
- $2n+p$ coins.

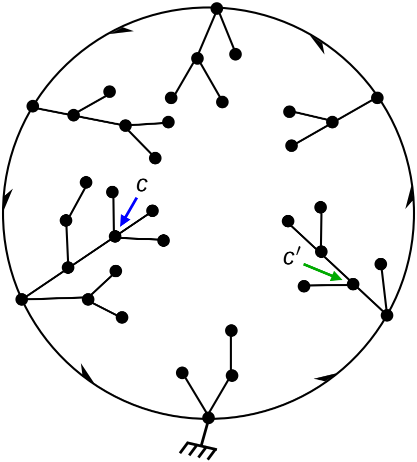
$$|\mathcal{F}_{n,p}| = \frac{p}{2n+p}\binom{2n+p}{n}$$

Ajout d'une arête

$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\,|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$

Ajout d'une arête

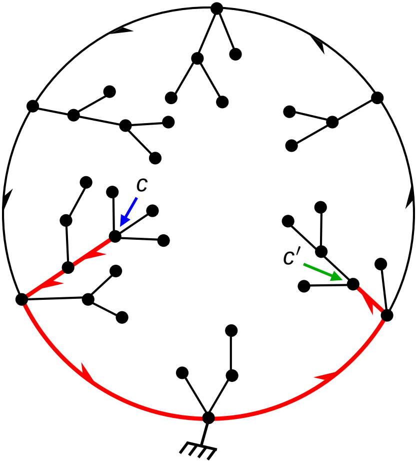
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\;|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\;|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On part d'une forêt avec deux coins marqués c et c'

Ajout d'une arête

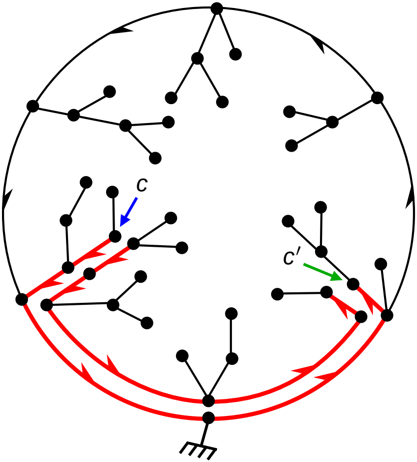
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\,|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On part d'une forêt avec deux coins marqués c et c'
- On considère l'unique chemin auto-évitant de c à c'

Ajout d'une arête

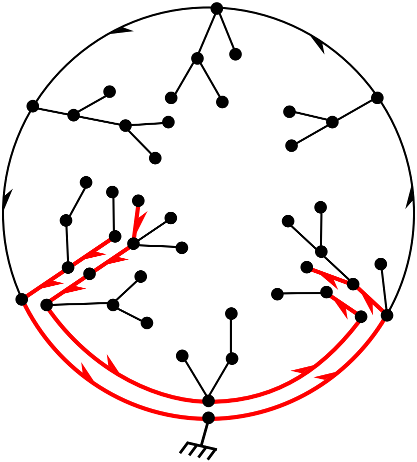
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\ |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On part d'une forêt avec deux coins marqués c et c'
- On considère l'unique chemin auto-évitant de c à c'
- On « coupe » le long de ce chemin entre les coins c et c'

Ajout d'une arête

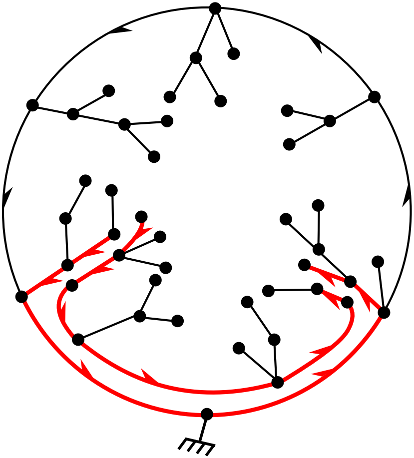
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On ajoute une arête orientée « à gauche » à la place de c et une arête orientée « à droite » à la place de c'

Ajout d'une arête

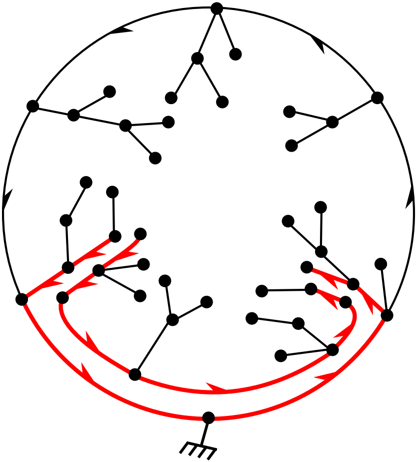
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\;|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\;|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On ajoute une arête orientée « à gauche » à la place de c et une arête orientée « à droite » à la place de c'
- On décale

Ajout d'une arête

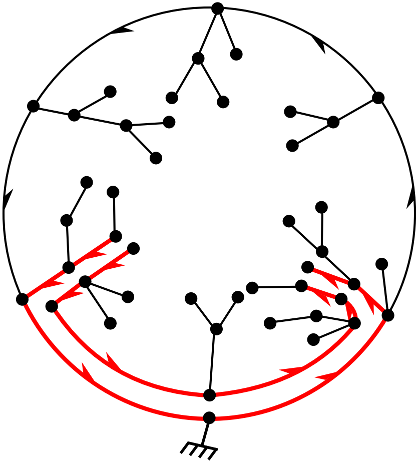
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\ |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On ajoute une arête orientée « à gauche » à la place de c et une arête orientée « à droite » à la place de c'
- On décale

Ajout d'une arête

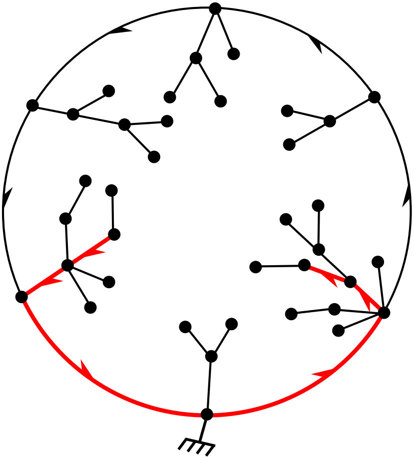
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On ajoute une arête orientée « à gauche » à la place de c et une arête orientée « à droite » à la place de c'
- On décale

Ajout d'une arête

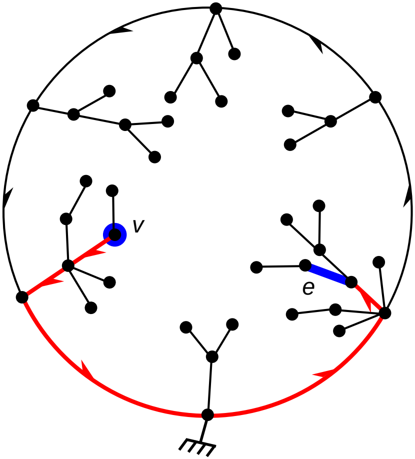
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\ |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On ajoute une arête orientée « à gauche » à la place de c et une arête orientée « à droite » à la place de c'
- On décale
- On recolle

Ajout d'une arête

$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\,|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



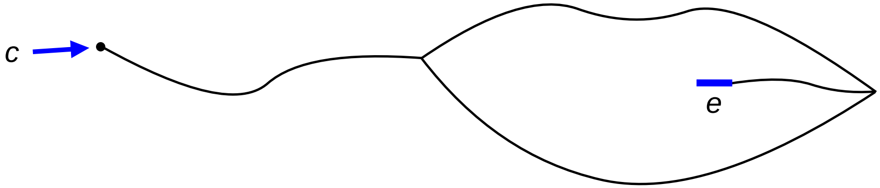
- On ajoute une arête orientée « à gauche » à la place de c et une arête orientée « à droite » à la place de c'
- On décale
- On recolle
- On distingue un sommet v et une arête e

Géodésique la plus à gauche/droite

En général, il y a plusieurs chemins entre deux éléments ; on utilise les géodésiques les plus à gauche ou les plus à droite.

Géodésique la plus à gauche/droite

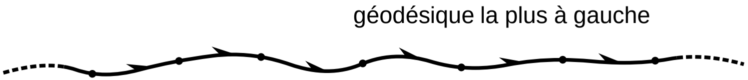
En général, il y a plusieurs chemins entre deux éléments ; on utilise les géodésiques les plus à gauche ou les plus à droite.



La géodésique la plus à gauche de c à e n'est pas toujours l'inverse de la géodésique la plus à droite de e à c.

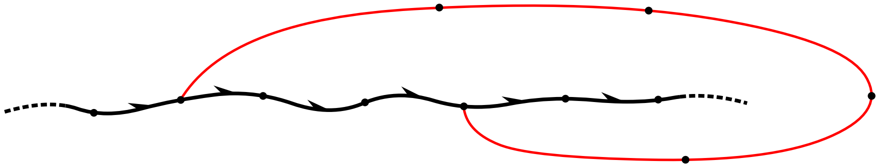
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



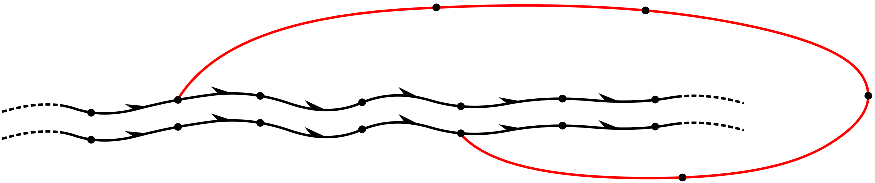
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



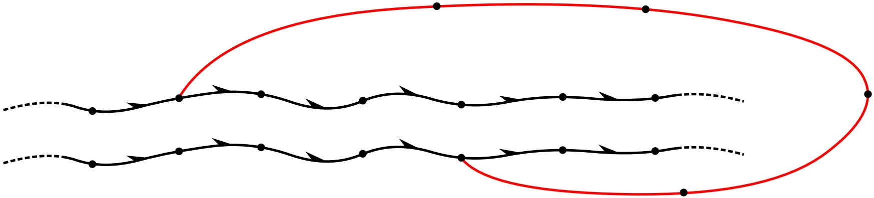
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



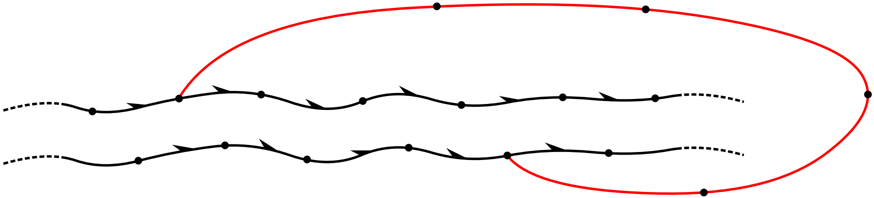
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



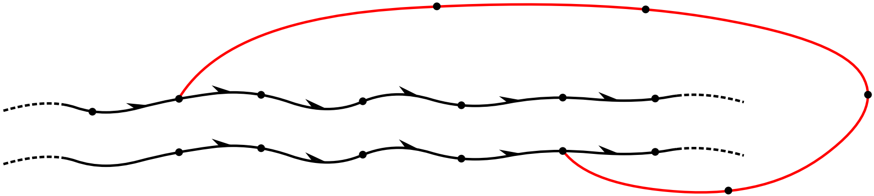
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



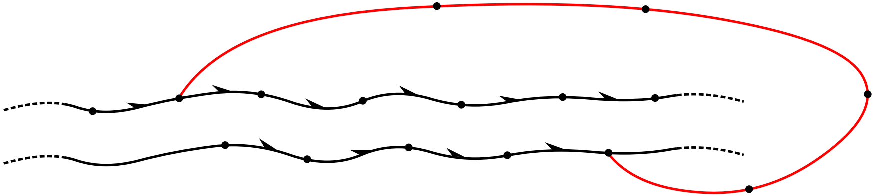
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



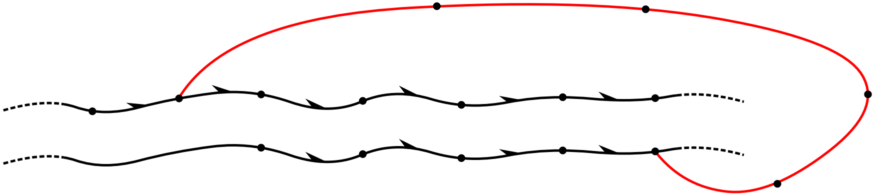
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



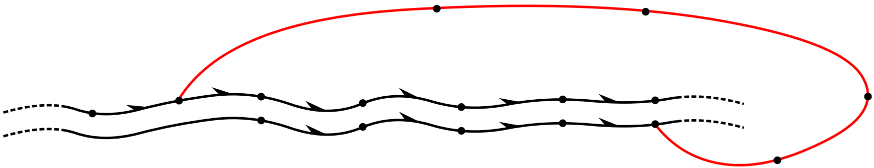
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



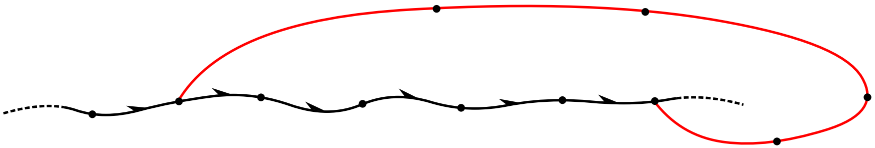
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



Géodésique la plus à gauche/droite

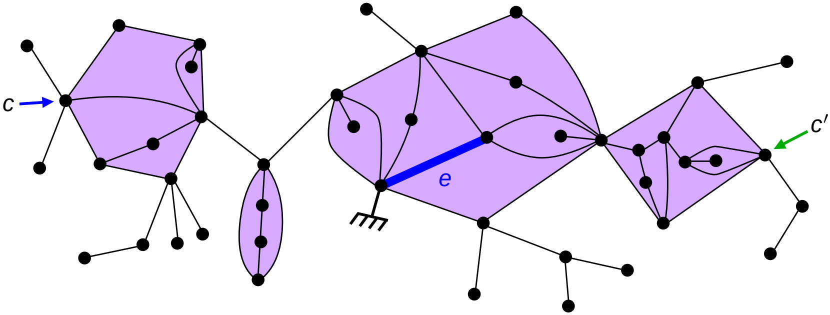
En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

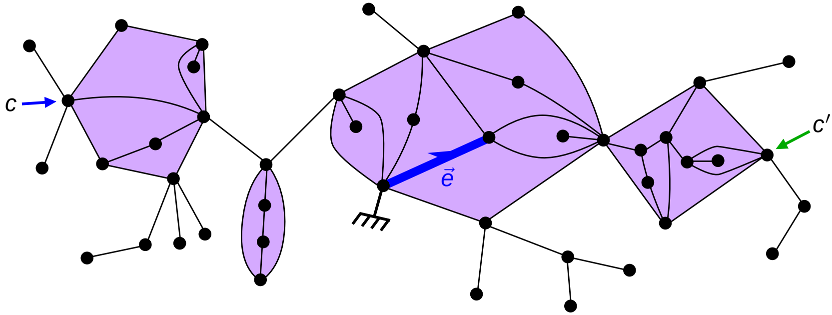
[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]

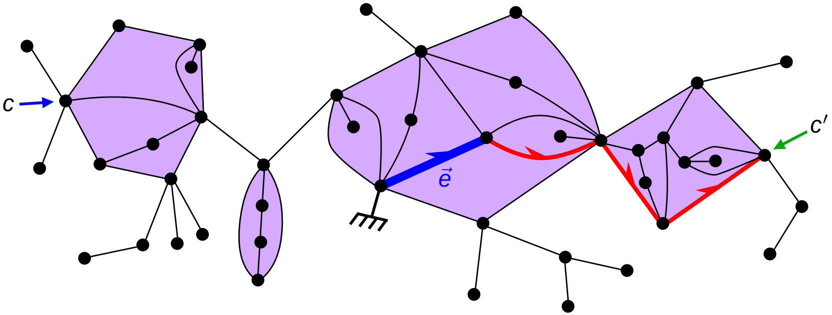


✧ On oriente e vers c'

Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]

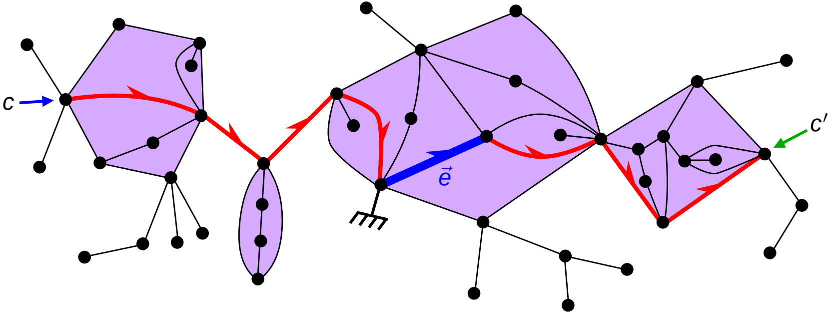


✧ On considère la géodésique la plus à droite de $\vec{e}$ vers c'

Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}} \; \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}} \; \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \; |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar} \; \underbrace{p}_{\text{autre } \bigstar} \; \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} \; |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]

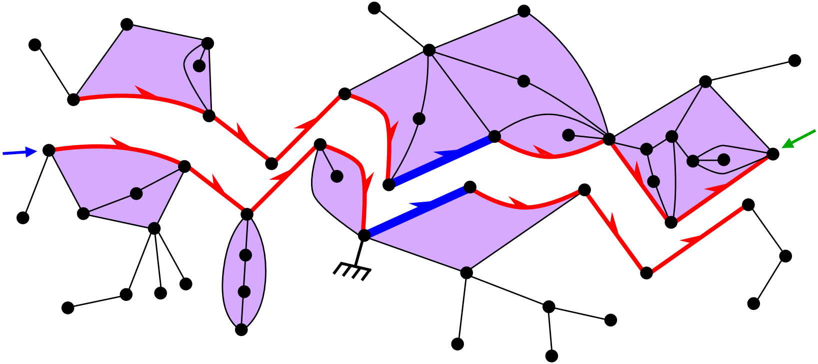


- On fait « de même » avec c au lieu de c'

Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

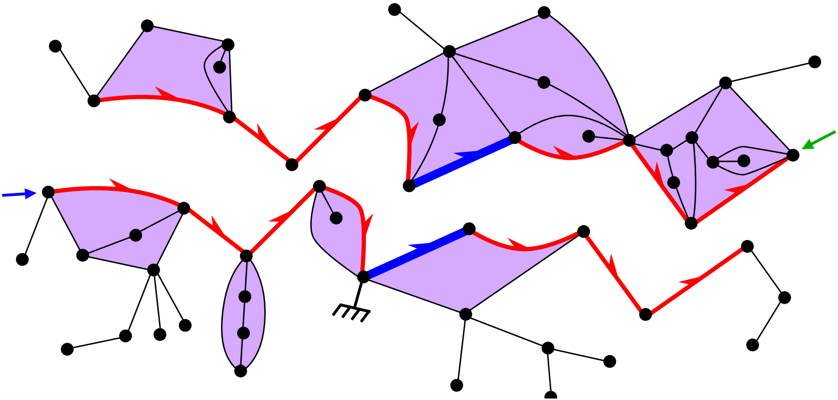
[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

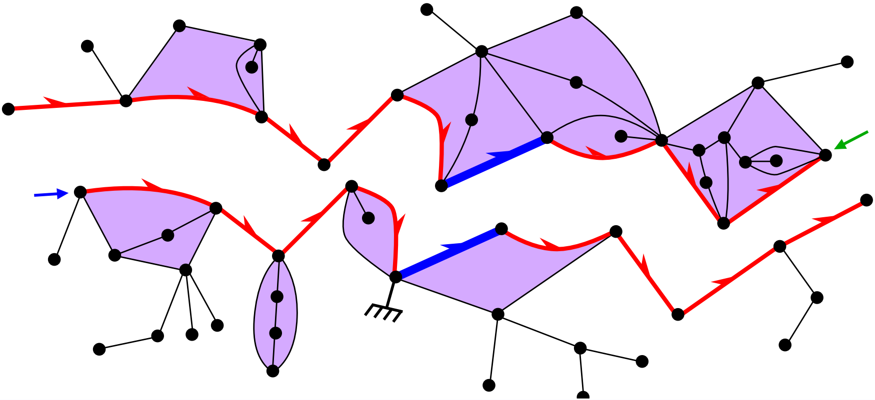
[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\star}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\star}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

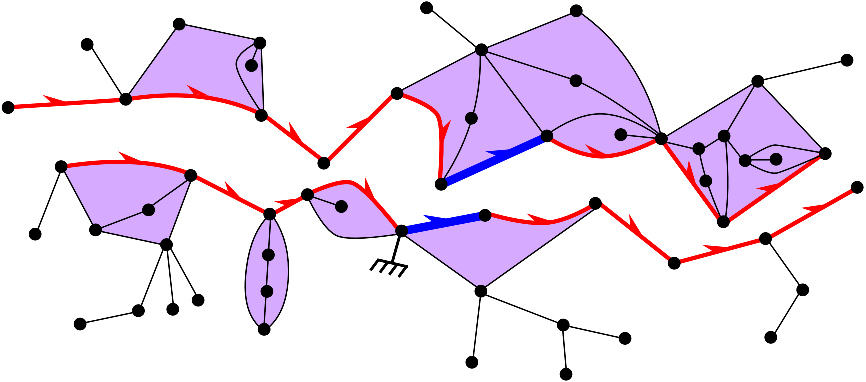
[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

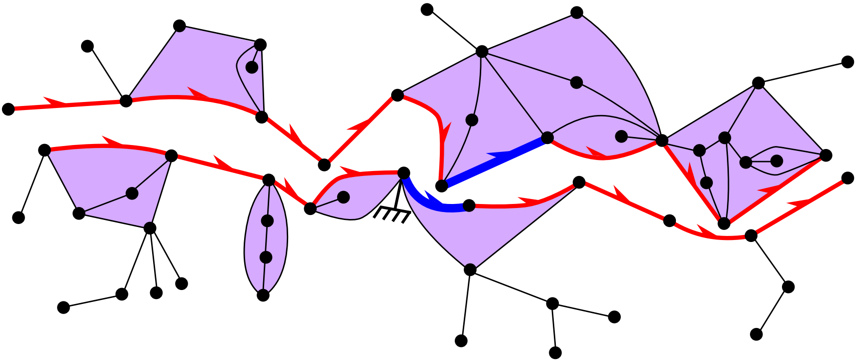
[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

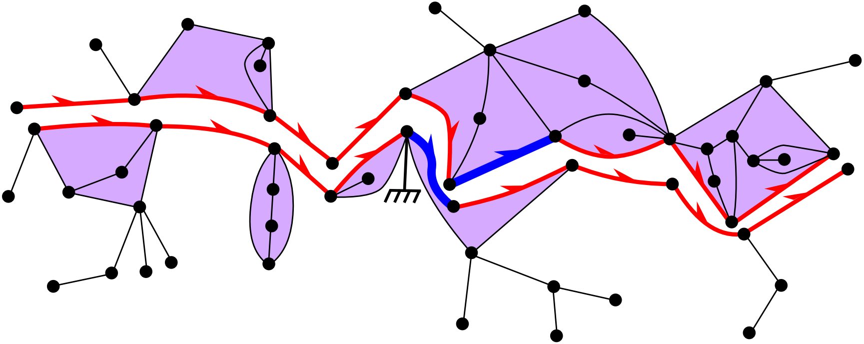
[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

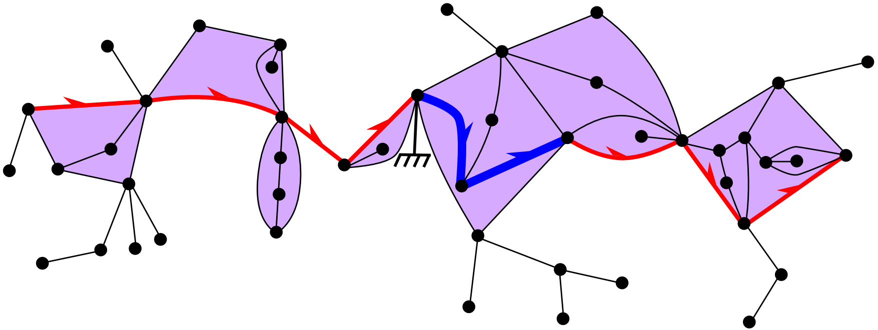
[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux arêtes orientées

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

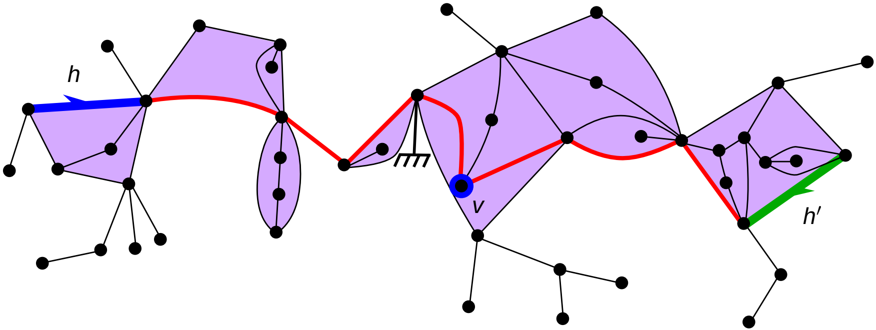
[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux arêtes orientées

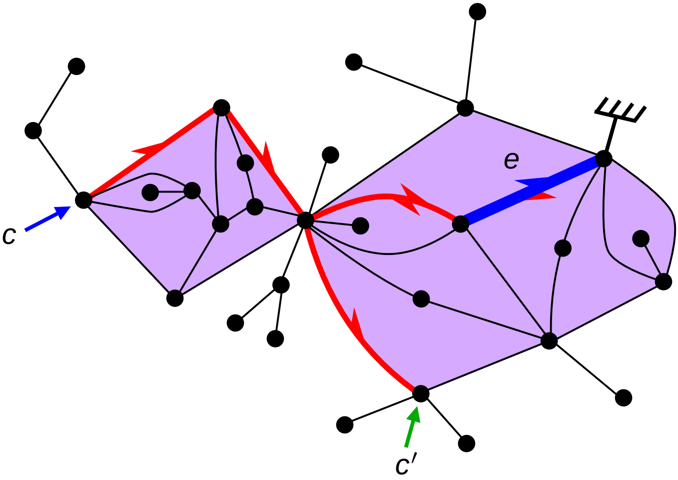
$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]

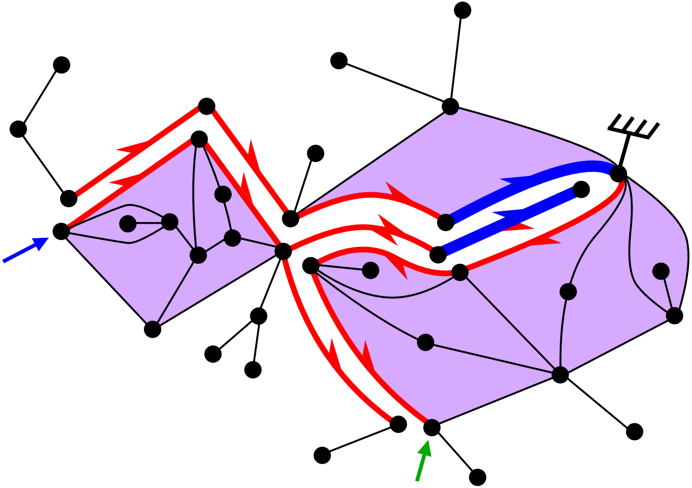


- On marque un sommet v et deux arêtes orientées h et h'

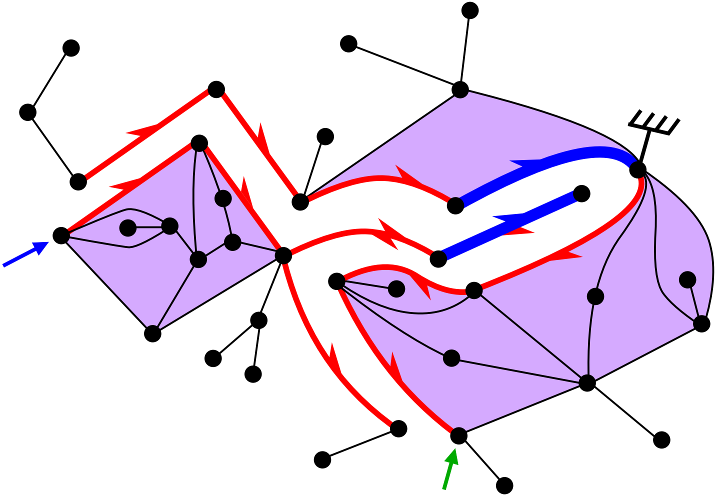
Ajout de deux arêtes orientées : cas « pincé »



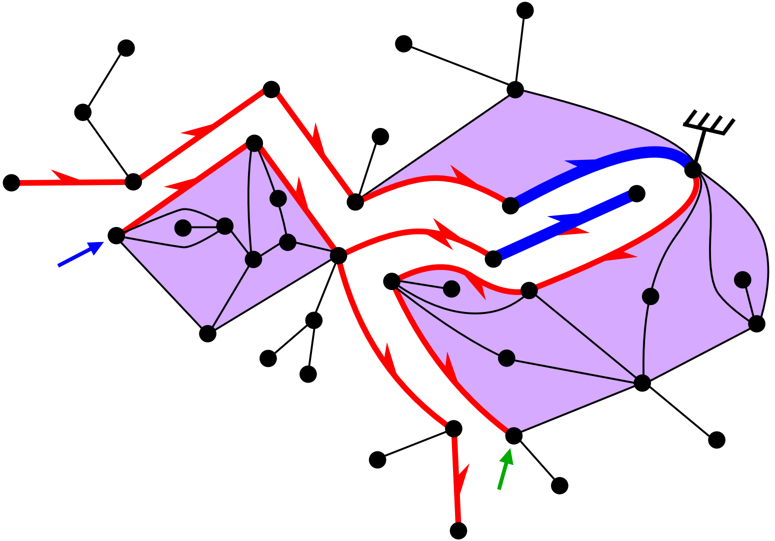
Ajout de deux arêtes orientées : cas « pincé »



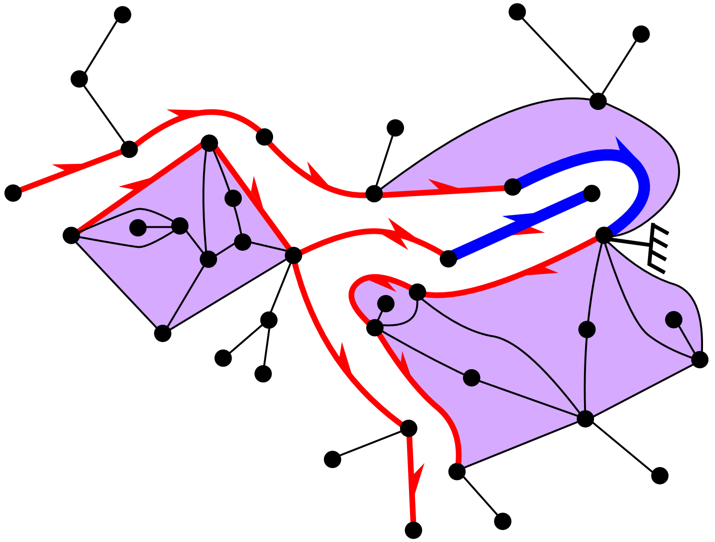
Ajout de deux arêtes orientées : cas « pincé »



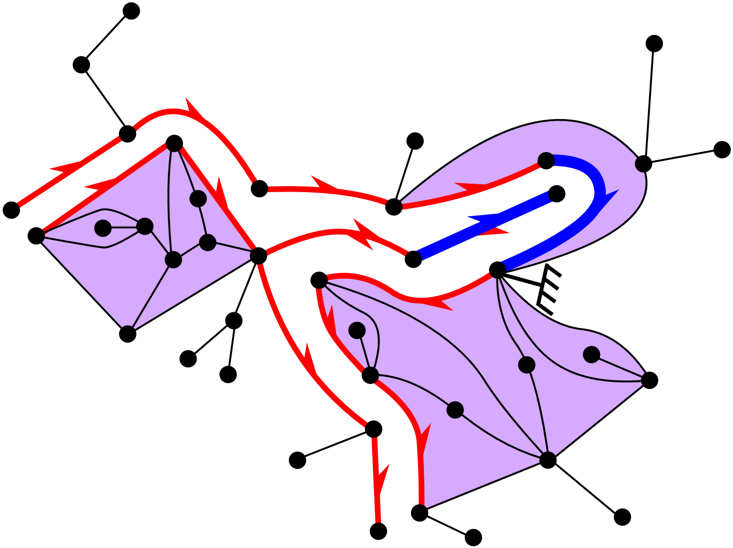
Ajout de deux arêtes orientées : cas « pincé »



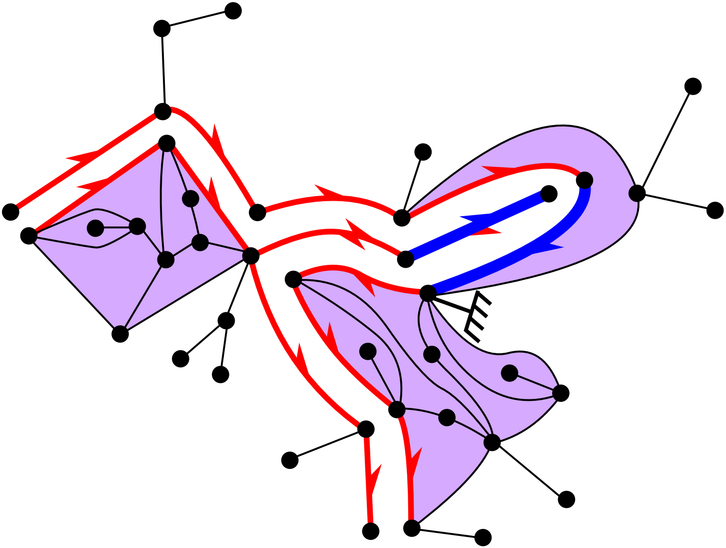
Ajout de deux arêtes orientées : cas « pincé »



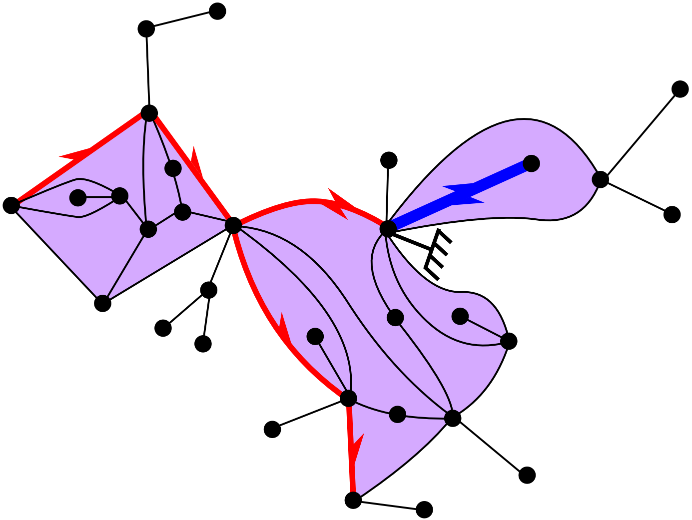
Ajout de deux arêtes orientées : cas « pincé »



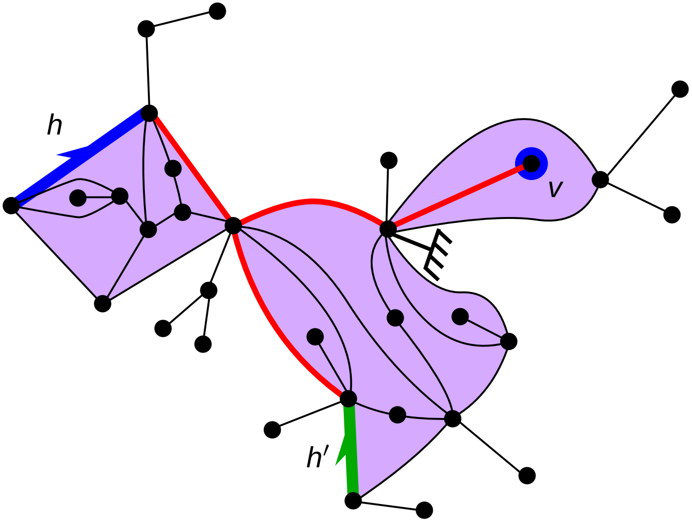
Ajout de deux arêtes orientées : cas « pincé »



Ajout de deux arêtes orientées : cas « pincé »



Ajout de deux arêtes orientées : cas « pincé »



Formule

Le nombre de cartes planaires biparties à n faces numérotées 1, 2, ..., n dont les degrés sont respectivement $2a_1$, $2a_2$, ..., $2a_n$ et avec un coin distingué par face est

$$\mathcal{C}(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \frac{(e-1)!}{v!} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2a_i)!}{(a_i-1)!\, a_i!}$$

où $e := \sum a_i$ et $v := e - n + 2$ denotent le nombre d'arêtes et de sommets de la carte.

Fixons p, a_2, ..., a_n et notons

- $\mathcal{C} := \mathcal{C}(p, a_2, \ldots, a_n)$ et e le nombre d'arêtes correspondant ;
- $\mathcal{C}^+ := \mathcal{C}(p+1, a_2, \ldots, a_n)$ et v^+ le nb de sommets correspondant.

$$(2p+1)\,(2p+2)\,e\,\mathcal{C} = (p+1)\,p\,v^+\,\mathcal{C}^+.$$

Interprétation et bijection

L'interprétation est similaire au cas des quadrangulations à bord. On voit la face 1 comme la face externe :

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{e}_{\text{arête}}\ \mathcal{C} = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{v^{+}}_{\text{sommet}}\ \mathcal{C}^{+}$$

[★ : arête orientée du bord dirigée vers le sommet]

La bijection presentée pour les quadrangulations s'étend immédiatement aux cartes biparties.

Ajout d'une face quadrangulaire

Pour ajouter une face de degré 4, on distingue une arête orientée que l'on transforme en face de degré 2 avec un coin marqué. On applique ensuite la bijection sur cette face de degré 2.

En particulier, on a une bijection pour ajouter un quadrangle dans une quadrangulation à bord qui interprete combinatoirement l'identité précédente :

$$3(2n+p)(2n+p+1)\,|\mathcal{Q}_{n,p}| = (n+1)(n+p+2)\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}|$$

car

$$\mathcal{C}(1,\underbrace{2,\dots,2}_{n \text{ termes}},p) = \underbrace{2(2n+p)}_{\text{ar. orient.}}\,4^n n!\,|\mathcal{Q}_{n,p}|$$

$$\mathcal{C}(\underbrace{2,\dots,2}_{n+1 \text{ termes}},p) = 4^{n+1}(n+1)!\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}|$$

Formule des slicings de Tutte

On retrouve la formule précédente

$$\mathcal{C}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{(e-1)!}{v!} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2a_i)!}{(a_i - 1)!\, a_i!}$$

en observant que

$$\mathcal{C}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ termes}}) = 2^{n-1}(n-1)!$$

et en utilisant la bijection pour faire « gonfler » $a_1 - 1$ fois la face 1, $a_2 - 1$ fois la face 2, ..., $a_n - 1$ fois la face n.

Merci de votre attention