# Topologie de la limite d'échelle de cartes aléatoires en genre quelconque

Groupe de travail des thésards du LPMA

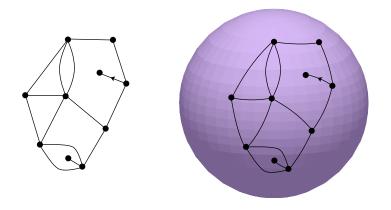
Paris

Jérémie BETTINELLI



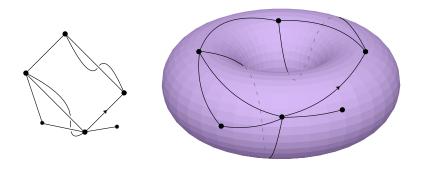
28 avril 2011

# Cartes, faces, genre, racine



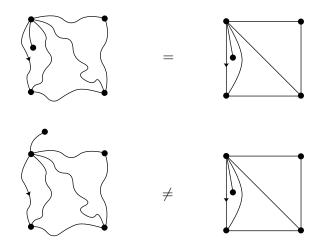
faces homéomorphes à des disques

# Cartes, faces, genre, racine

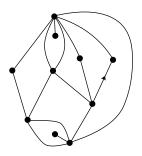


faces homéomorphes à des disques

# Cartes isomorphes

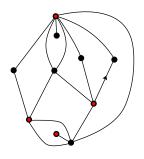


## Quadrangulations



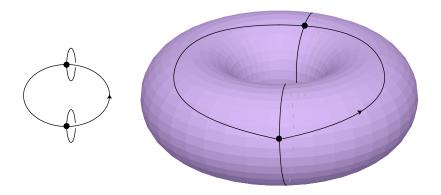
toutes les faces sont de degré 4

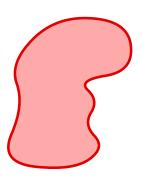
# Cartes biparties

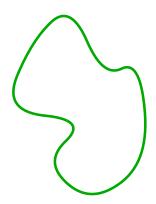


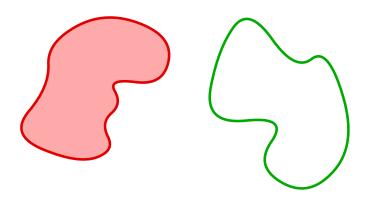
il existe un 2-coloriage des sommets tel qu'aucune arête ne rejoint 2 sommets de même couleur

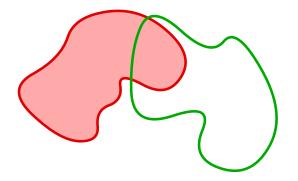
# Exemple de quadrangulation non bipartie en genre 1

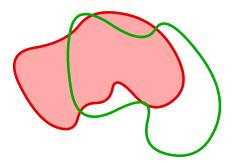


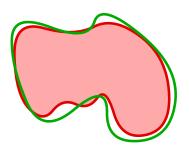


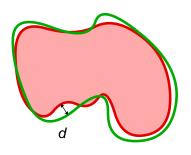












- [X, d] : classe d'isométries de (X, d)
- CM :=  $\{[X, d], (X, d) \text{ métrique compact}\}$

$$\begin{array}{ll} \textit{d}_{\textit{GH}}\left([\textit{X},\textit{d}],[\textit{X}',\textit{d}']\right) := & \inf\limits_{\left(\textit{Z},\delta\right) \text{ m\'etrique}} & \delta_{\mathcal{H}}\big(\varphi(\textit{X}),\varphi'(\textit{X}')\big) \\ & \varphi:\left(\textit{X},\textit{d}\right) \rightarrow \left(\textit{Z},\delta\right) \\ & \varphi':\left(\textit{X}',\textit{d}'\right) \rightarrow \left(\textit{Z},\delta\right) \end{array}$$

• L'espace (CM, d<sub>GH</sub>) est polonais.

## Limite d'échelle : cas planaire

• q<sub>n</sub> uniforme, bipartie, enracinée, n faces, planaire (genre 0)

## Théoreme (Le Gall, 07)

L'espace métrique  $(q_n, n^{-1/4}d_{q_n})$  tend en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff, le long d'une sous-suite, vers un espace métrique aléatoire limite (q, d).

### Théoreme (Le Gall, 07)

La dimension de Hausdorff de (q, d) est p.s. 4.

## Théoreme (Le Gall & Paulin, Miermont, 08)

L'espace (q, d) est p.s. homéomorphe à la sphère de  $\mathbb{R}^3$ .

#### Théoreme (Miermont, 11)

L'espace  $(q_n, n^{-1/4}d_{q_n})$  tend en loi vers (q, d).

## Limite d'échelle : genre quelconque

q<sub>n</sub> uniforme, bipartie, enracinée, n faces, genre g ≥ 1

## Théoreme (B., 10)

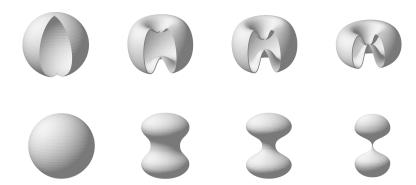
L'espace métrique  $(q_n, n^{-1/4}d_{q_n})$  tend en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff, le long d'une sous-suite, vers un espace métrique aléatoire limite (q, d).

### Théoreme (B., 10)

La dimension de Hausdorff de (q, d) est p.s. 4.

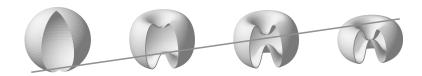
### Théoreme (B., 11)

L'espace (q, d) est p.s. homéomorphe au tore à g trous  $\mathbb{T}_g$ .



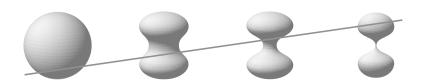
## Définition (espace géodésique)

Un espace métrique  $(\mathcal{X}, d)$  est un **espace géodésique** si, pour tous  $x, y \in \mathcal{X}$ , il existe un chemin de x à y isométrique à [0, d(x, y)].



## Définition (1-régularité)

Une suite  $(\mathcal{X}_n)_n$  d'espace géodésiques est **1-régulière** si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour n assez grand, tout lacet de diamètre inférieur à  $\delta$  dans  $\mathcal{X}_n$  est homotope à 0 dans son  $\varepsilon$ -voisinage.



### Définition (espace géodésique)

Un espace métrique  $(\mathcal{X}, d)$  est un **espace géodésique** si, pour tous  $x, y \in \mathcal{X}$ , il existe un chemin de x à y isométrique à [0, d(x, y)].

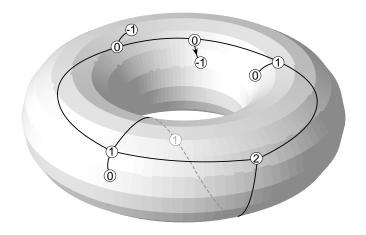
### Définition (1-régularité)

Une suite  $(\mathcal{X}_n)_n$  d'espace géodésiques est **1-régulière** si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour n assez grand, tout lacet de diamètre inférieur à  $\delta$  dans  $\mathcal{X}_n$  est homotope à 0 dans son  $\varepsilon$ -voisinage.

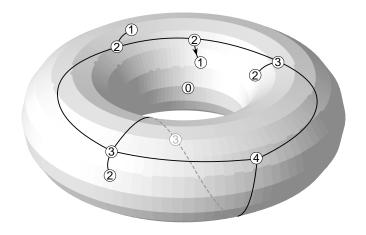
### Théoreme (Begle, 44)

Soit  $(\mathcal{X}_n)_n$  une suite 1-régulière d'espaces géodésiques homéomorphes au tore  $\mathbb{T}_g$  telle que  $\mathcal{X}_n \stackrel{\mathsf{GH}}{\longrightarrow} \mathcal{X}$ . Alors  $\mathcal{X}$  est soit réduit à un point, soit homéomorphe à  $\mathbb{T}_g$ .

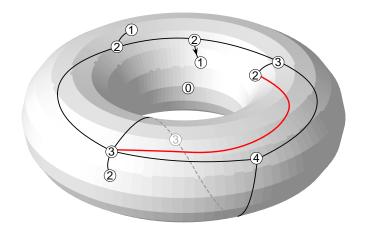
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



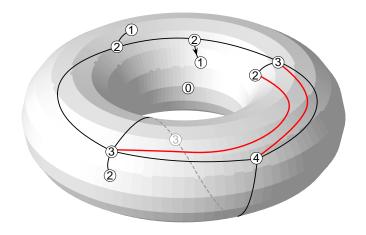
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



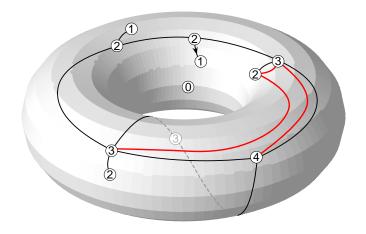
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



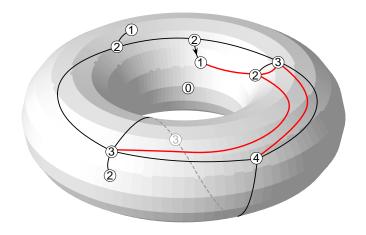
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



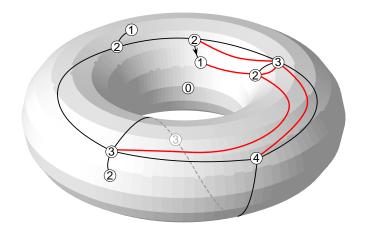
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



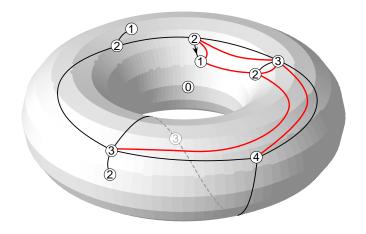
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- g-arbres enracinés bien étiquetés à n arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



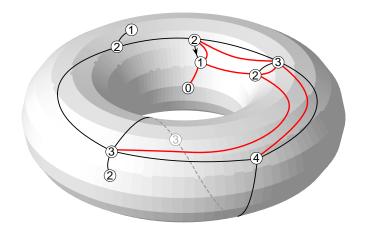
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- g-arbres enracinés bien étiquetés à n arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



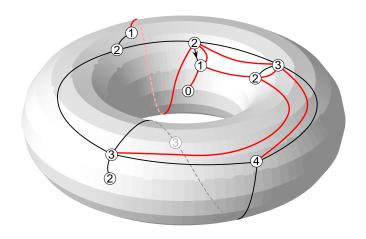
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



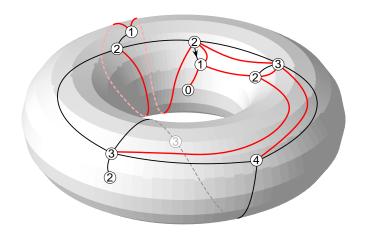
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



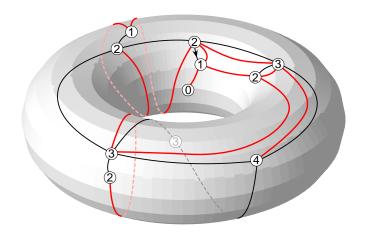
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



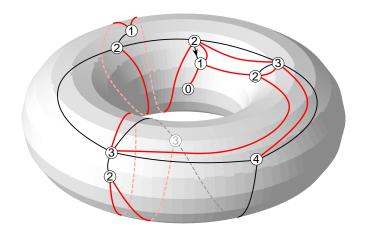
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



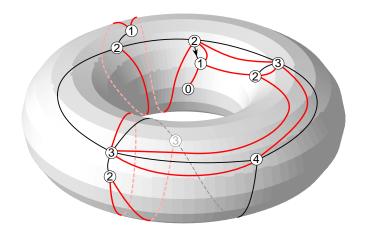
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



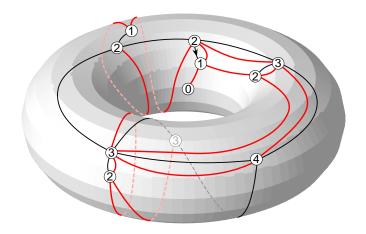
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- g-arbres enracinés bien étiquetés à n arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



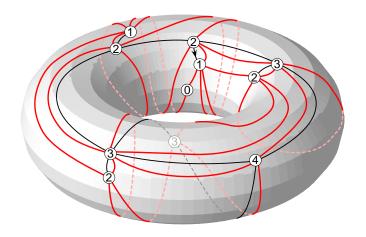
- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- g-arbres enracinés bien étiquetés à n arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$

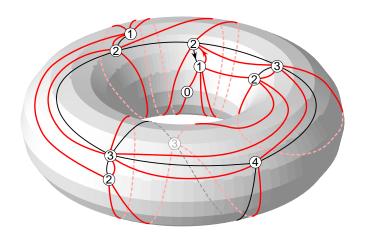


- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



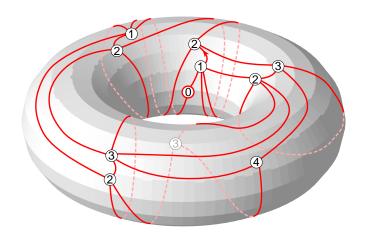
# Bijection de Chapuy-Marcus-Schaeffer

- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- ullet g-arbres enracinés bien étiquetés à n arêtes,  $\epsilon \in \{-1,1\}$

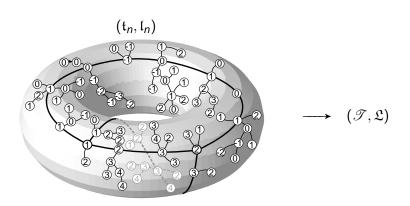


# Bijection de Chapuy-Marcus-Schaeffer

- quad. biparties enracinées pointées à n faces en genre g
- *g*-arbres enracinés bien étiquetés à *n* arêtes,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$



#### Résultats de convergence



$$(\mathfrak{q}_n, n^{-1/4} d_{\mathfrak{q}_n}) \longrightarrow (\mathfrak{q} = \mathscr{T}_{/\sim}, d)$$

## Résultats préliminaires

- $\mathscr T$  est codé par [0,1] :  $\mathscr T=[0,1]_{/\simeq}$
- $\mathcal{T}(s)$ : classe de  $s \in [0,1]$  dans  $\mathcal{T}$
- **feuille**: point  $a \in \mathcal{T}$  tell que  $\mathcal{T}^{-1}(a)$  est un singleton

#### **Proposition**

Si  $\mathcal{T}(s)$  n'est pas une feuille, alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\inf_{\mathscr{T}([s,s+\varepsilon])}\mathfrak{L}<\mathfrak{L}(\mathscr{T}(s)).$$

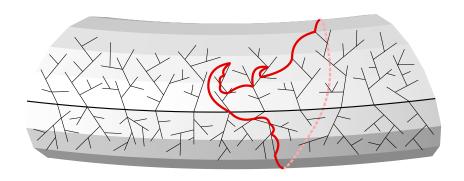
#### **Proposition**

Si a et  $b \in \mathcal{T}$  sont identifiés dans  $\mathfrak{q}$  (i.e.  $a \sim b$ ), alors a et b sont des feuilles.

### Absence de petits lacets non contractiles

#### Lemme

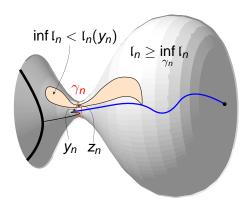
P.s., il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour n assez grand, tout lacet simple non contractile de  $\mathfrak{q}_n$  a un diamètre supérieur à  $\varepsilon_0$ .



## Diamètre de l'intérieur des petits lacets contractiles

#### Lemme

P.s., pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $0 < \delta < \varepsilon \wedge \varepsilon_0$  tel que, pour n assez grand, l'intérieur de tout lacet simple de  $\mathfrak{q}_n$  de diamètre inférieur à  $\delta$  a un diamètre inférieur à  $\varepsilon$ .



#### Quelques références



Jérémie Bettinelli.

Scaling limits for random quadrangulations of positive genus.

Electron. J. Probab., 15: no. 52, 1594-1644, 2010.



Jérémie Bettinelli.

The topology of scaling limits of positive genus random quadrangulations.

arXiv:0804.3012, à paraître dans Ann. Probab., 2011.



Jean-François Le Gall.

The topological structure of scaling limits of large planar maps.

Invent. Math., 169(3): 621-670, 2007.



Jean-François Le Gall and Frédéric Paulin.

Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere.

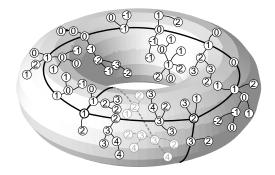
Geom. Funct. Anal., 18(3): 893–918, 2008.

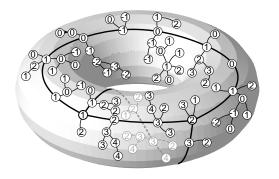


Grégory Miermont.

On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations.

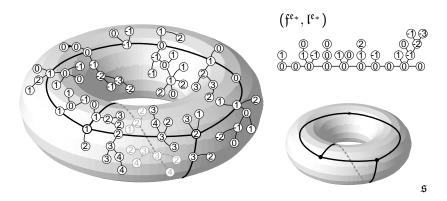
Electron. Commun. Probab., 13: 248-257, 2008.

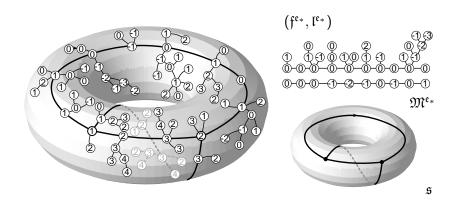






ĩ





### Convergence des forêts et ponts de Motzkin

