Quadrangulations aléatoires et processus de branchement

Jérémie BETTINELLI

Mai 2008

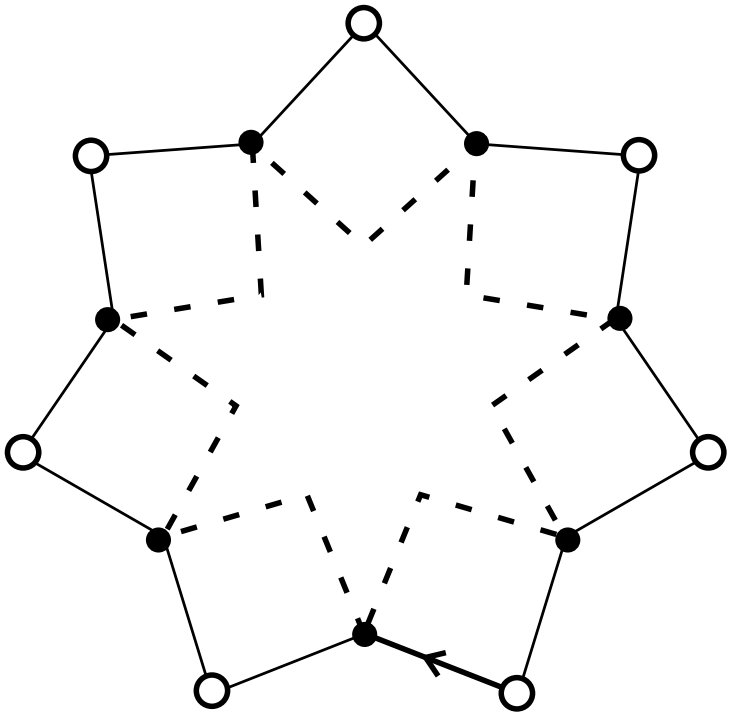
Table des matières

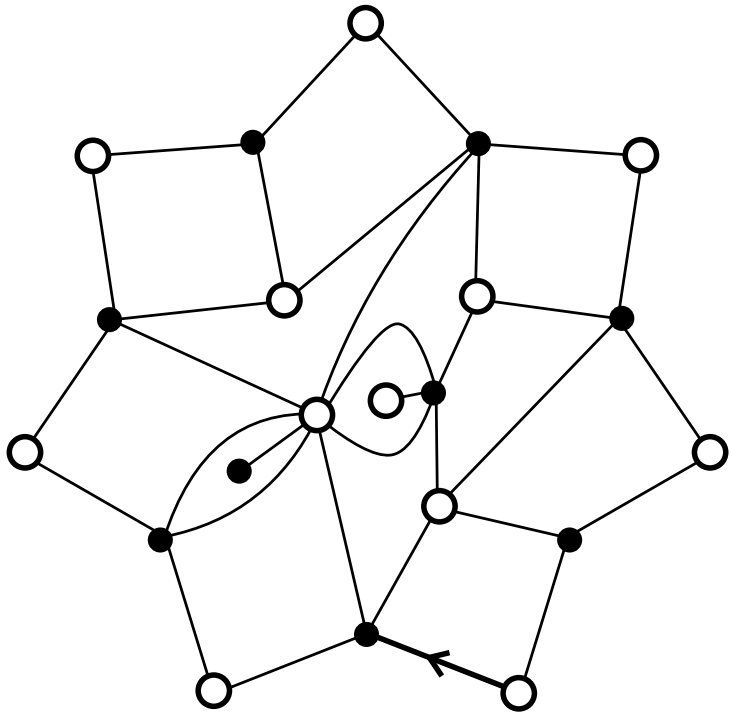
1. Définitions
   - Quadrangulations
   - Métrique
   - Enveloppe
2. Dénombrement de quadrangulations
   - Asymptotiques
   - Probabilité d'avoir une enveloppe donnée
3. Lien avec un processus de branchement
   - Tranches
   - Squelette
   - Processus de branchement
4. Applications

Table des matières

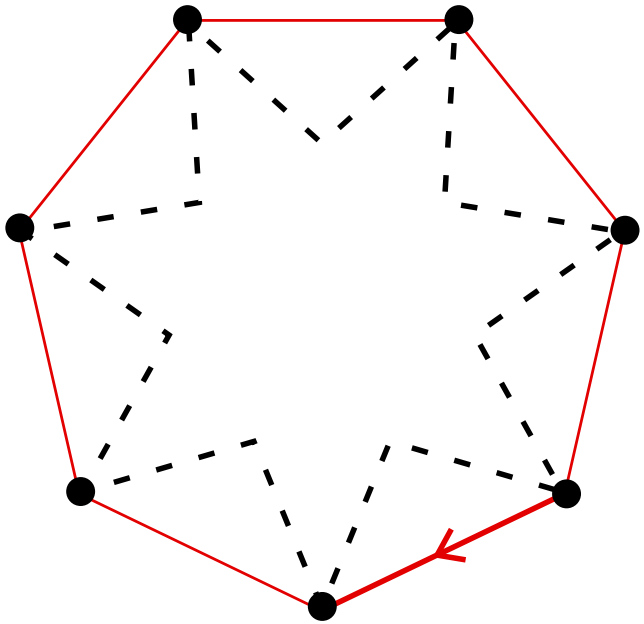
1. Définitions
   - Quadrangulations
   - Métrique
   - Enveloppe
2. Dénombrement de quadrangulations
   - Asymptotiques
   - Probabilité d'avoir une enveloppe donnée
3. Lien avec un processus de branchement
   - Tranches
   - Squelette
   - Processus de branchement
4. Applications

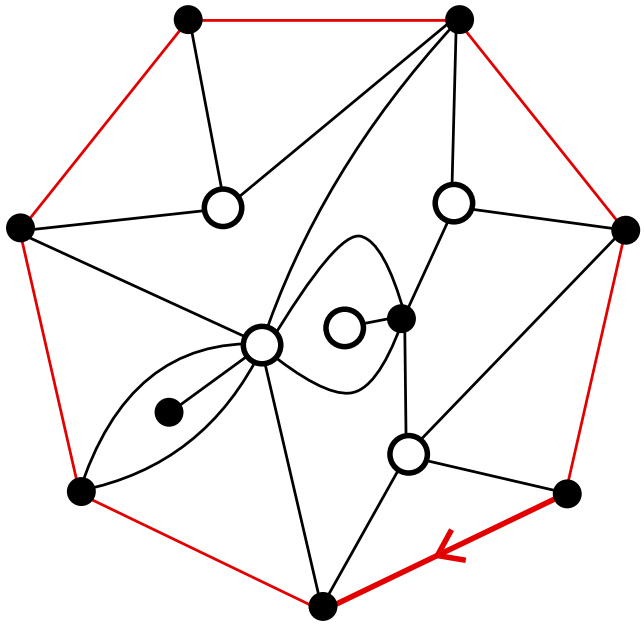
Quadrangulation à bord simple





Quadrangulation à frontière, (n, m)-quadrangulation





Boule de taille R

- **hauteur** : distance à la racine
- $B_R(\mathbf{q})$: carte composée des faces de $\mathbf{q}$ dont un des sommets est de hauteur strictement inférieure à R
- métrique :

$$d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) := \inf \left\{ \frac{1}{R+1}, \mid B_R(\mathbf{q}_1) = B_R(\mathbf{q}_2) \right\}$$

Théorème

La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers une probabilité μ portée par les quadrangulations infinies.

Boule de taille R

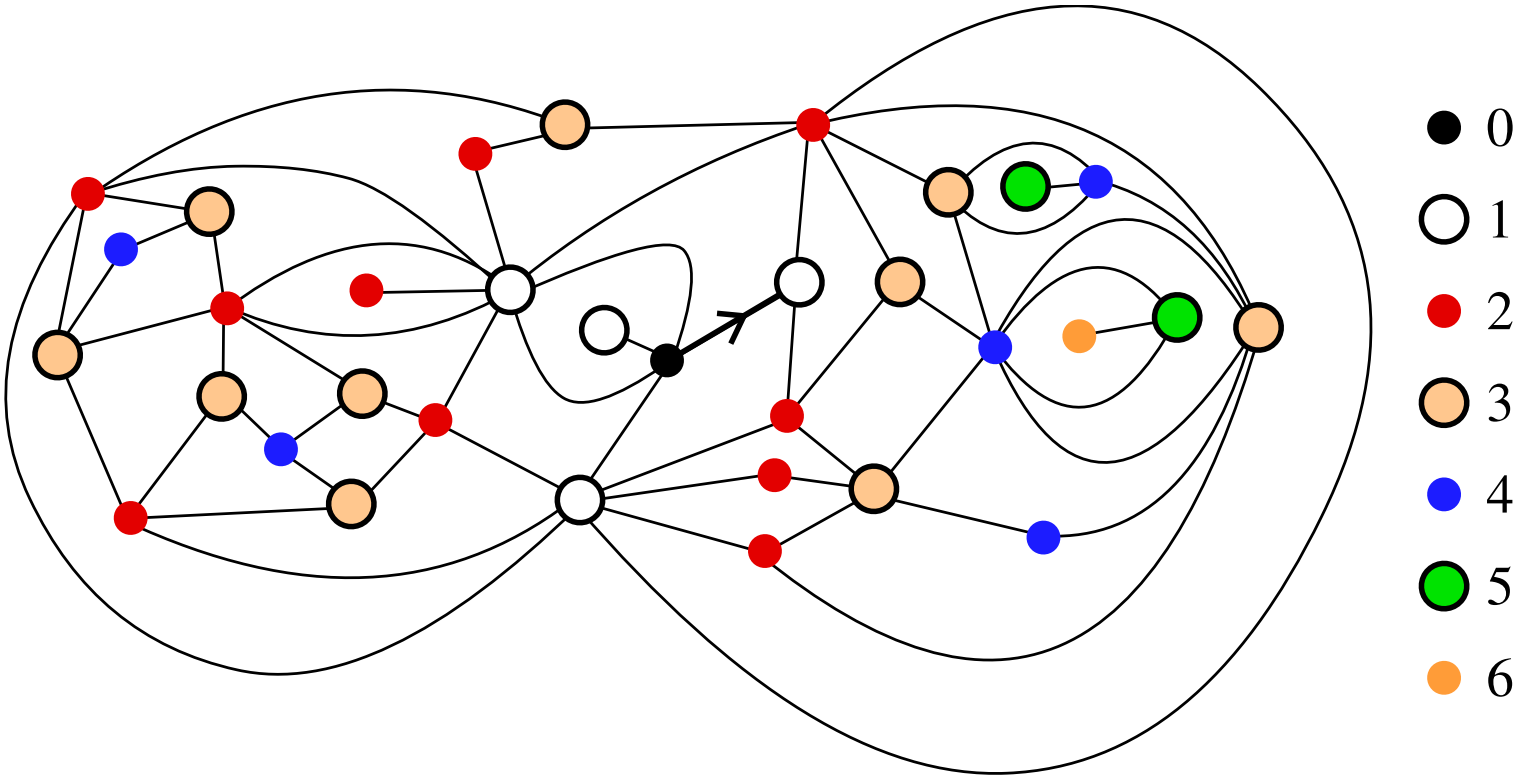
- **hauteur** : distance à la racine
- $B_R(\mathbf{q})$: carte composée des faces de $\mathbf{q}$ dont un des sommets est de hauteur strictement inférieure à R
- métrique :

$$d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) := \inf \left\{ \frac{1}{R+1}, \mid B_R(\mathbf{q}_1) = B_R(\mathbf{q}_2) \right\}$$

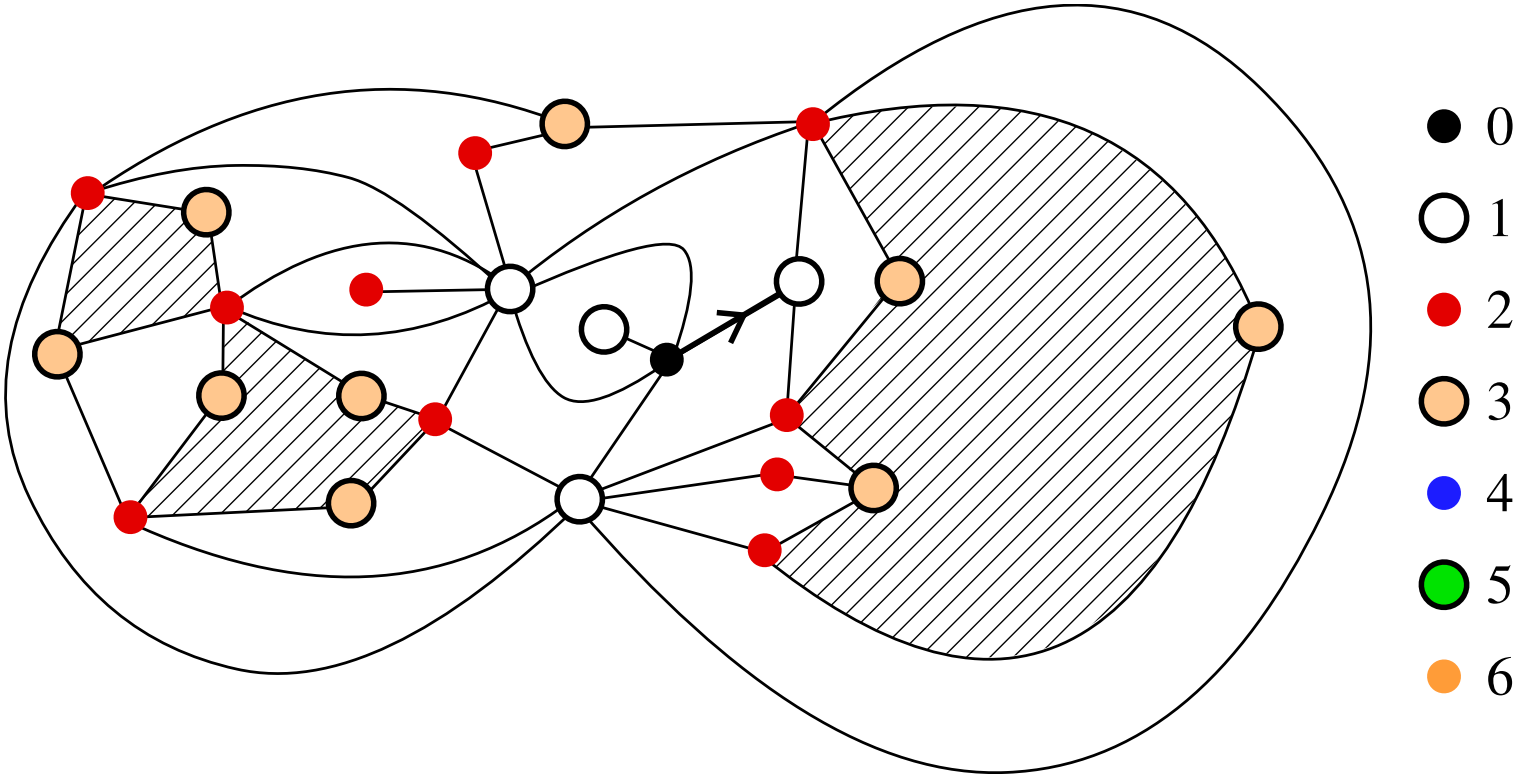
Théorème

La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers une probabilité μ portée par les quadrangulations infinies.

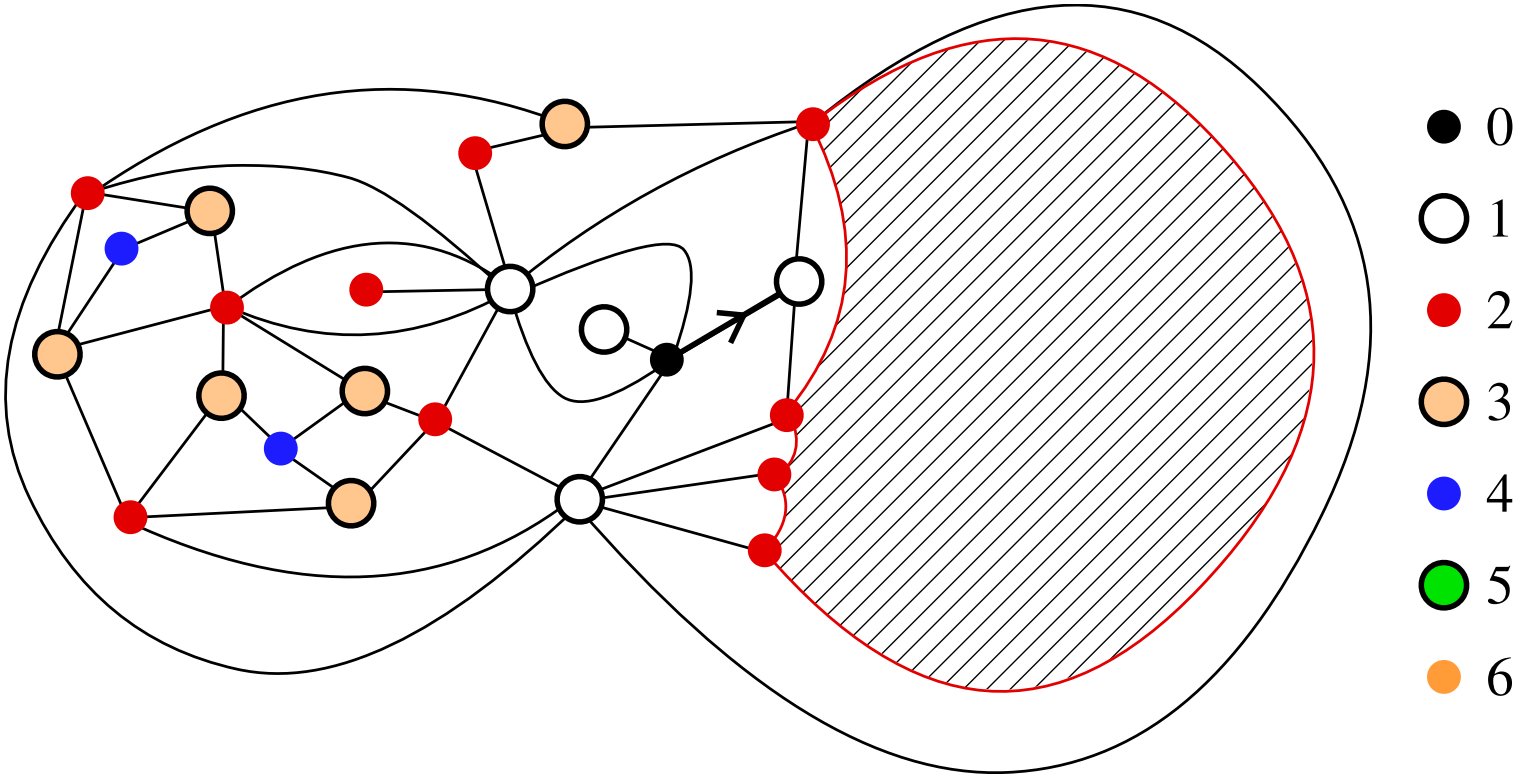
Exemple de quadrangulation enracinée



Boule de taille 2



Enveloppe de taille 2



Enveloppe de taille 2

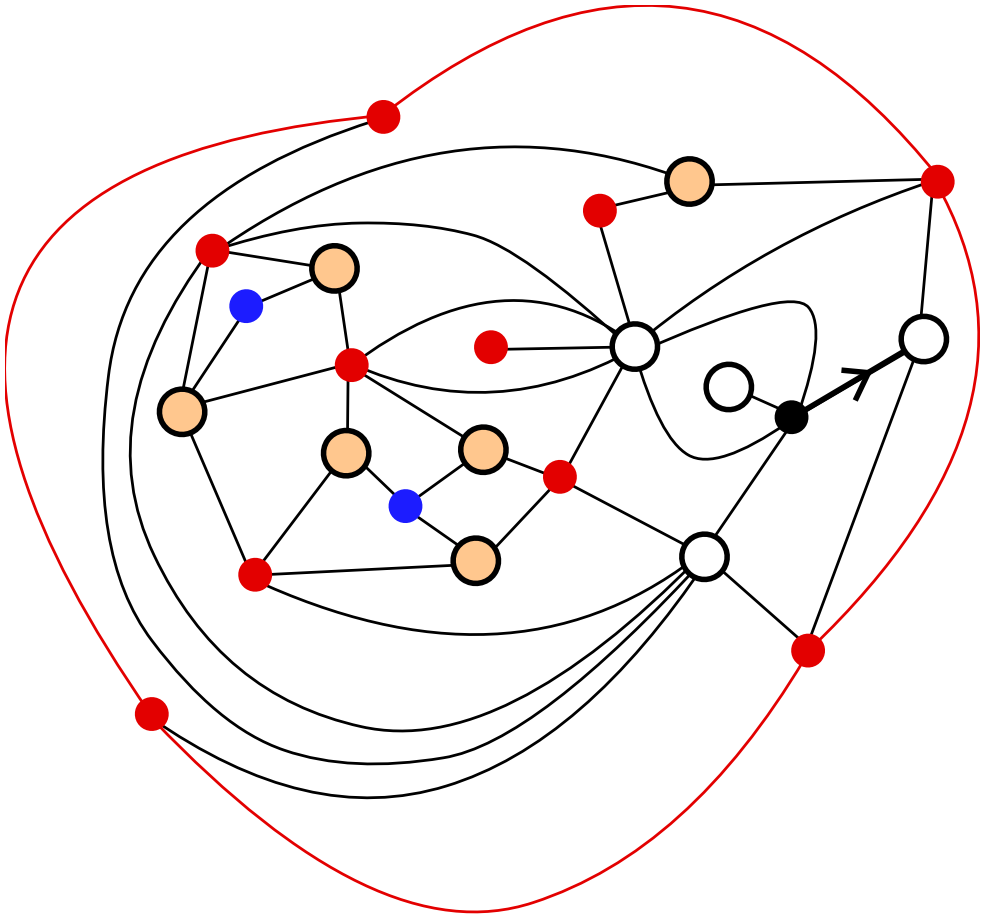


Table des matières

1. Définitions
   - Quadrangulations
   - Métrique
   - Enveloppe
2. Dénombrement de quadrangulations
   - Asymptotiques
   - Probabilité d'avoir une enveloppe donnée
3. Lien avec un processus de branchement
   - Tranches
   - Squelette
   - Processus de branchement
4. Applications

Asymptotiques

- $C(n)$: nombre de quadrangulations à $n+1$ faces
- $C(n,m)$: nombre de (n,m)-quadrangulations

Proposition

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, lorsque $n \to \infty$,

$$C(n,m) \sim \frac{b(m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} n^{-\frac{5}{2}} 12^n, \qquad \text{où}$$

$$b(m) := [y^m] \frac{64\sqrt{3}\, y}{\sqrt{(y-18)(y-2)^3}}.$$

- $C(n) = C(n+1,1)$

Asymptotiques

- $C(n)$: nombre de quadrangulations à $n+1$ faces
- $C(n,m)$: nombre de (n,m)-quadrangulations

Proposition

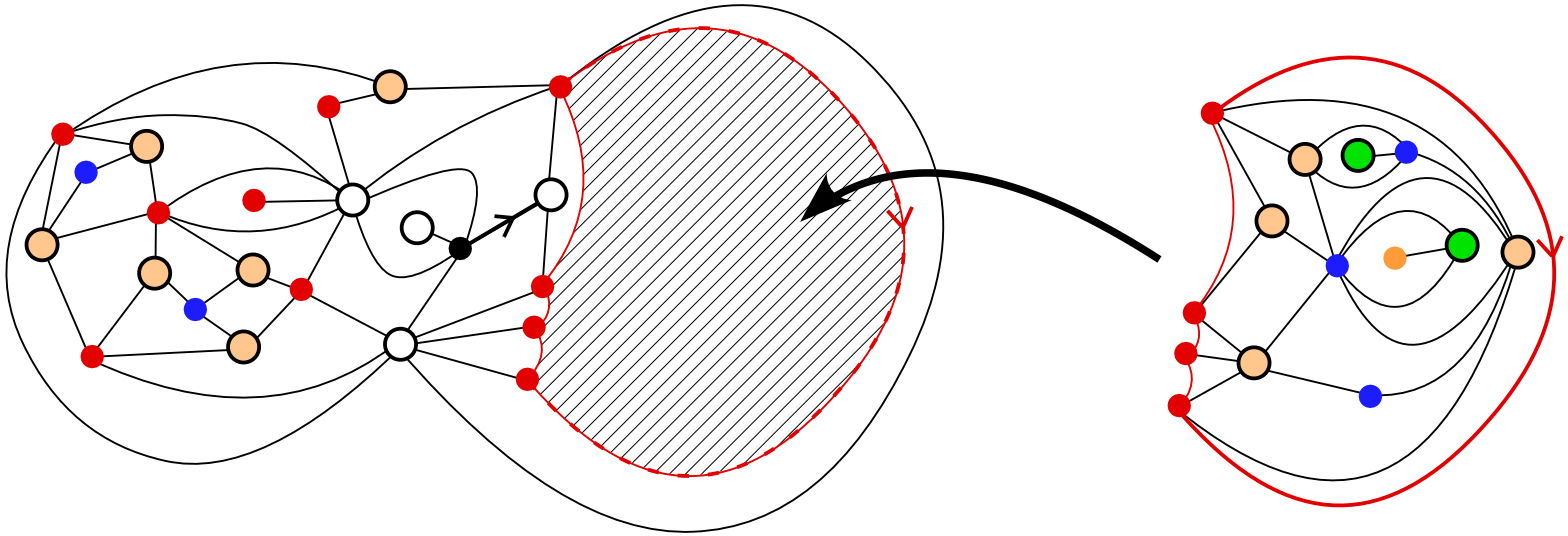
Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, lorsque $n \to \infty$,

$$C(n,m) \sim \frac{b(m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} n^{-\frac{5}{2}} 12^n, \qquad \text{où}$$

$$b(m) := [y^m] \frac{64\sqrt{3}\, y}{\sqrt{(y-18)(y-2)^3}}.$$

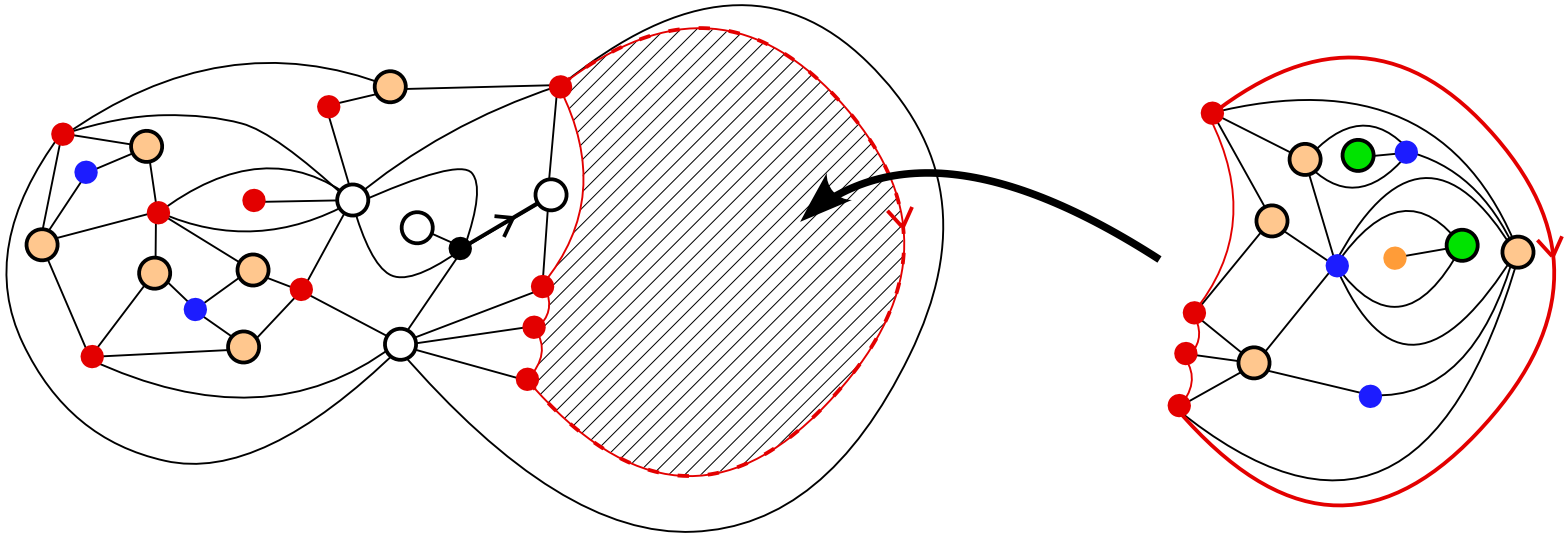
- $C(n) = C(n+1,1)$

Probabilité d'avoir une enveloppe donnée



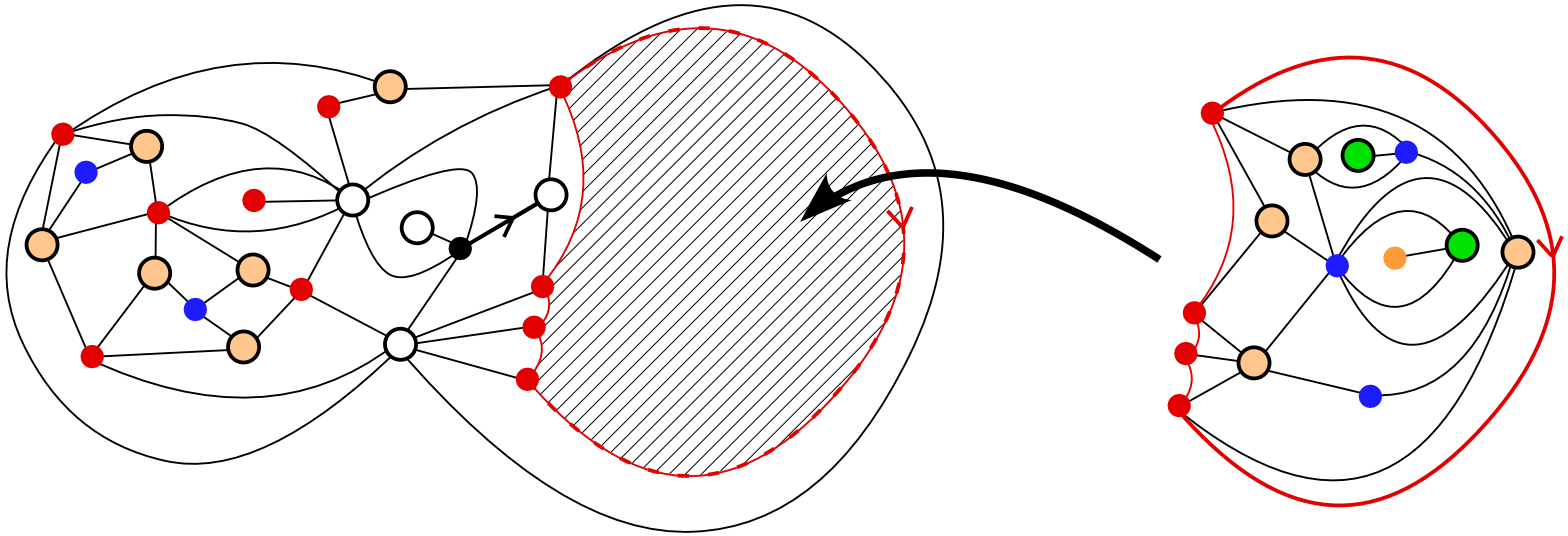
$$\mathbb{P}\left(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K\right) = \frac{C(N-n+m,m)}{C(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{b(m)}{b(1)} 12^{m-n-1}$$

Probabilité d'avoir une enveloppe donnée



$$\mathbb{P}\left(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K\right) = \frac{C(N-n+m,m)}{C(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{b(m)}{b(1)} 12^{m-n-1}$$

Probabilité d'avoir une enveloppe donnée

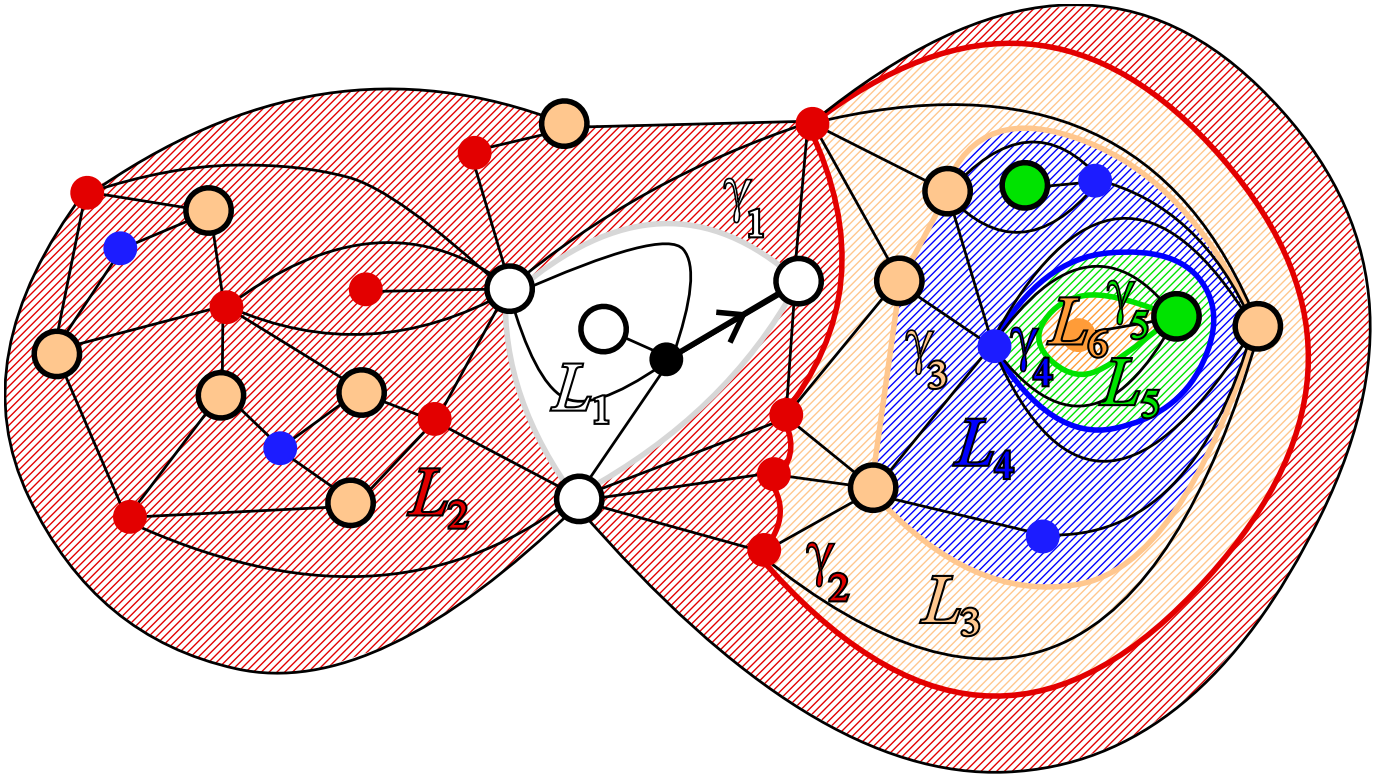


$$\mathbb{P}\left(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K\right) = \frac{C(N-n+m,m)}{C(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{b(m)}{b(1)} 12^{m-n-1}$$

Table des matières

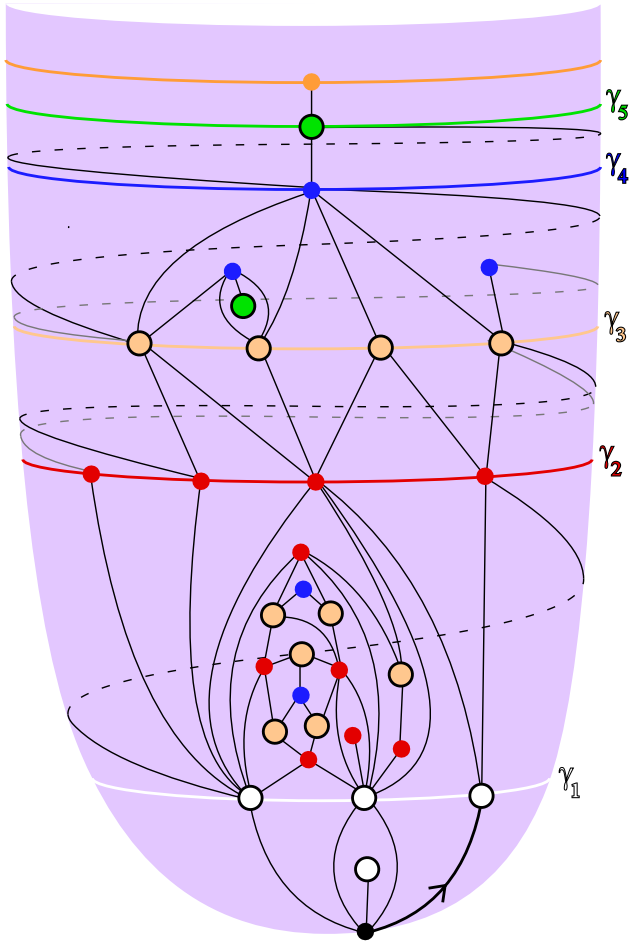
1. Définitions
   - Quadrangulations
   - Métrique
   - Enveloppe
2. Dénombrement de quadrangulations
   - Asymptotiques
   - Probabilité d'avoir une enveloppe donnée
3. Lien avec un processus de branchement
   - Tranches
   - Squelette
   - Processus de branchement
4. Applications

Structure en tranches

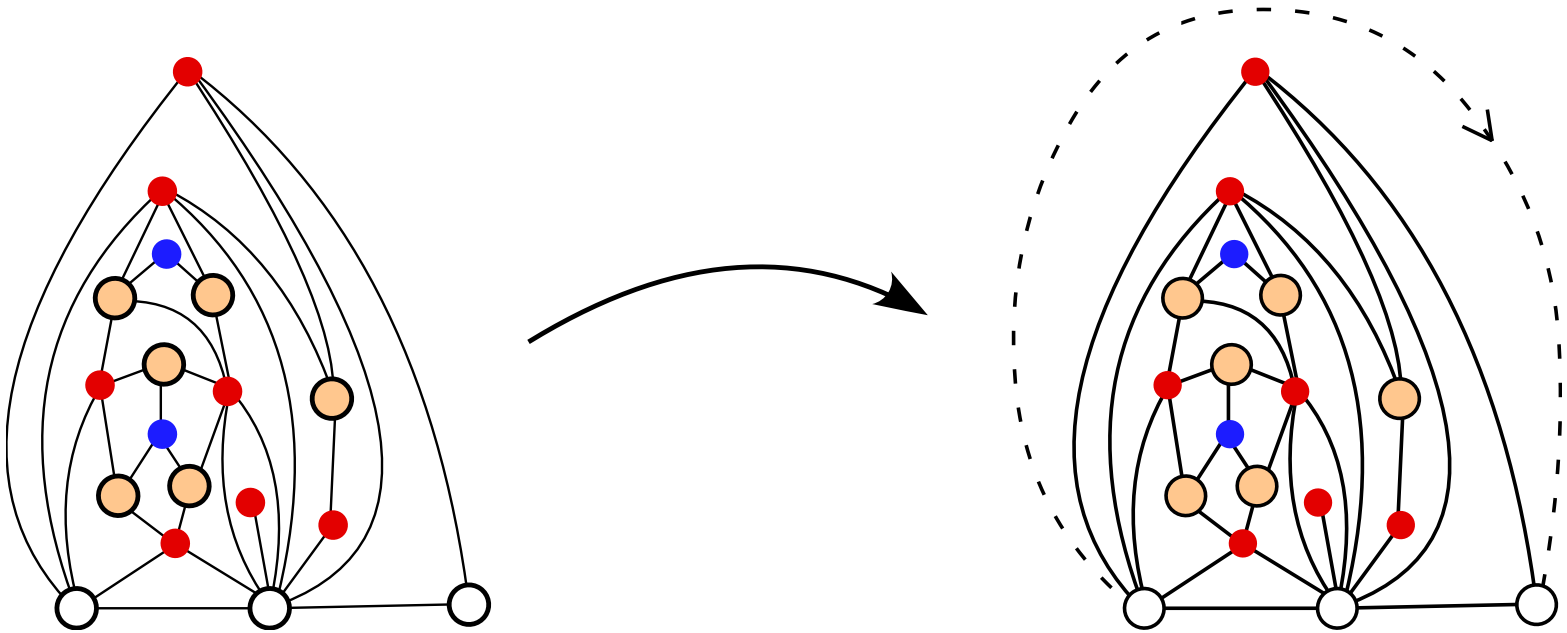


$$L_r \approx \hat{B}_r \setminus \hat{B}_{r-1}$$

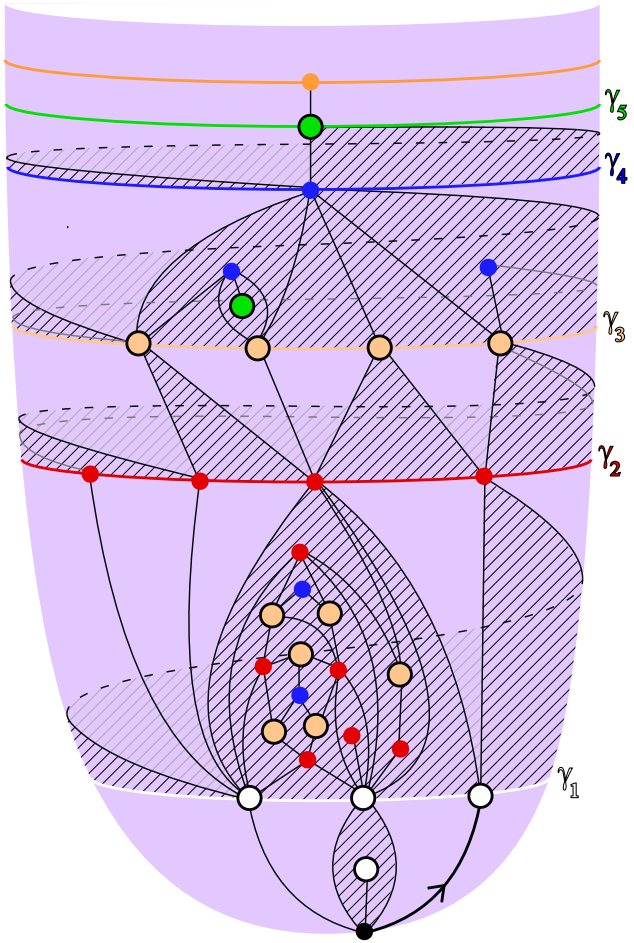
Description des tranches



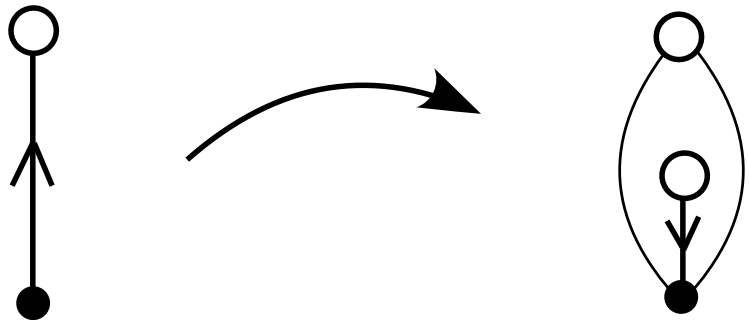
Transformation des blocs



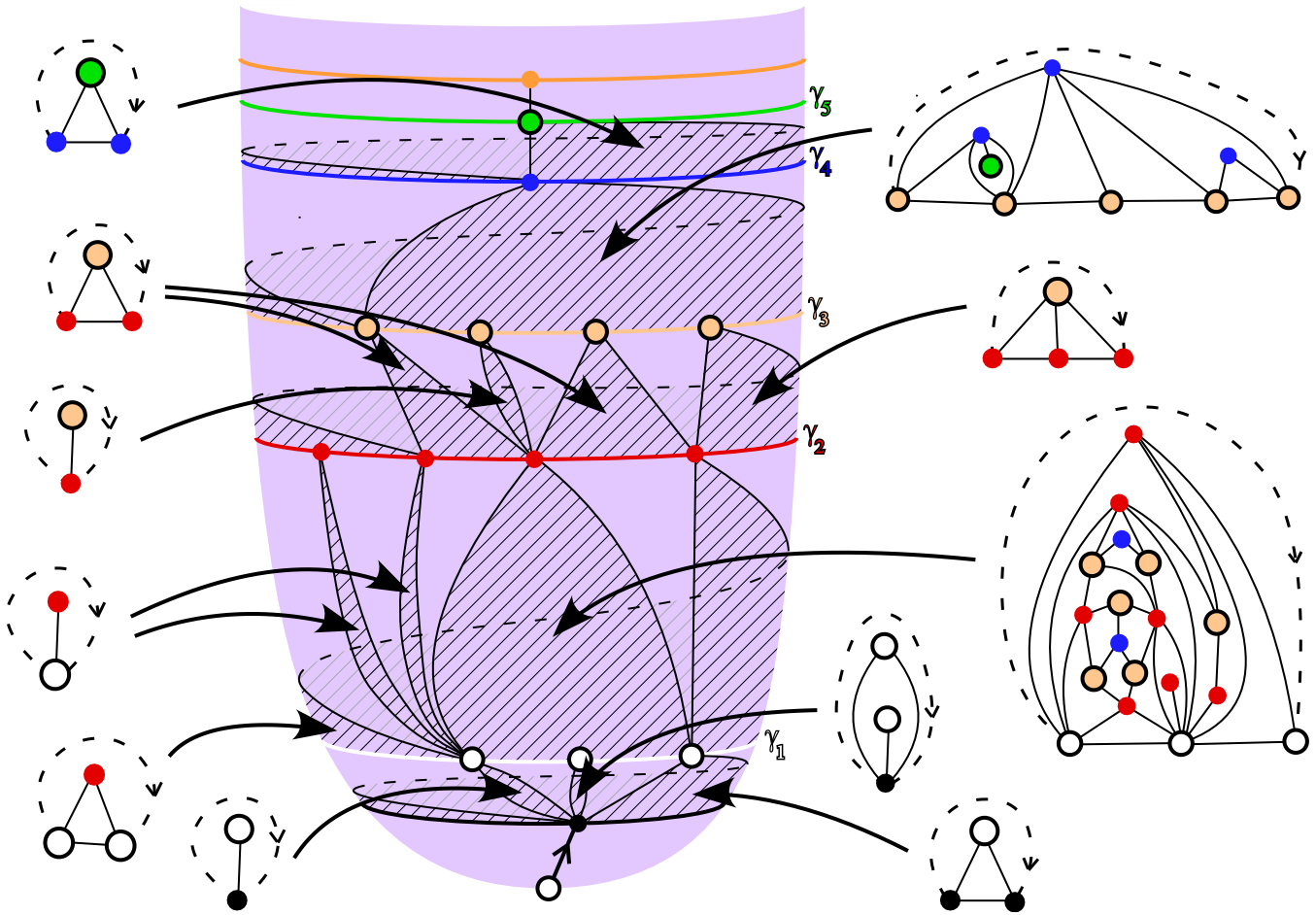
Décomposition de l'enveloppe



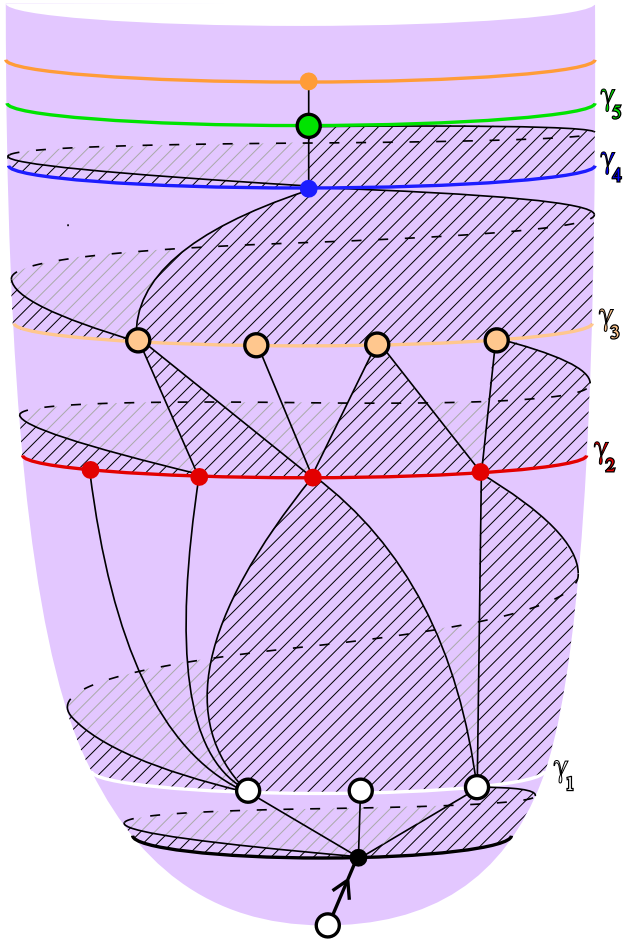
Transformation de la racine



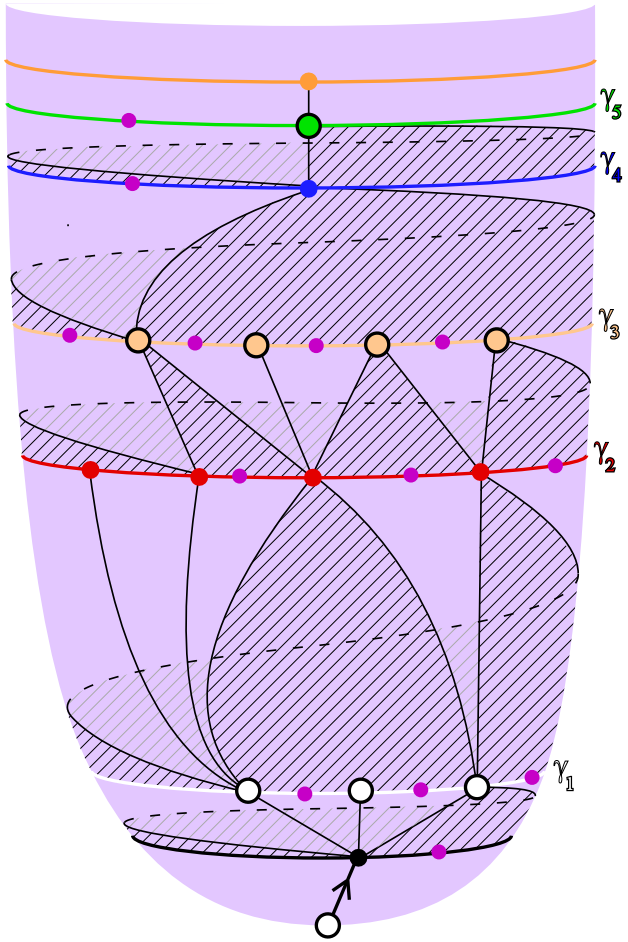
Squelette d'une enveloppe

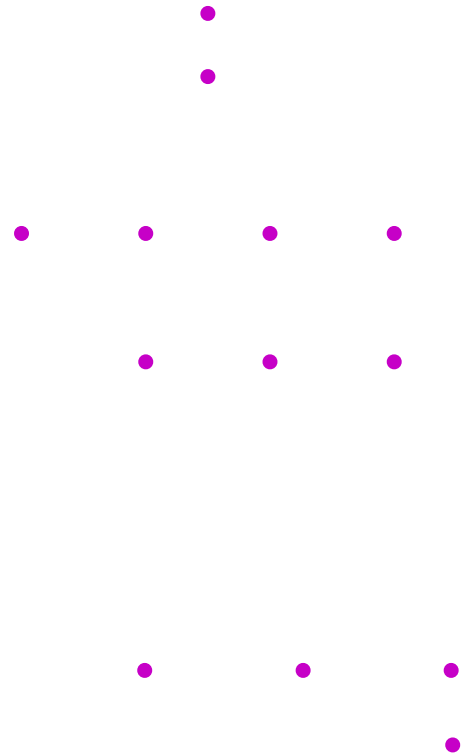


Forêt induite

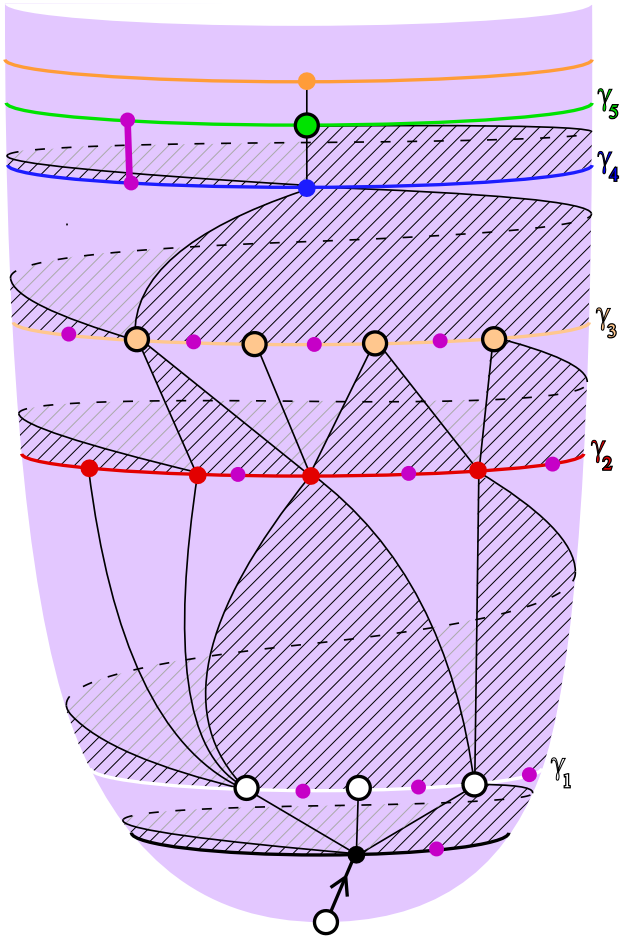


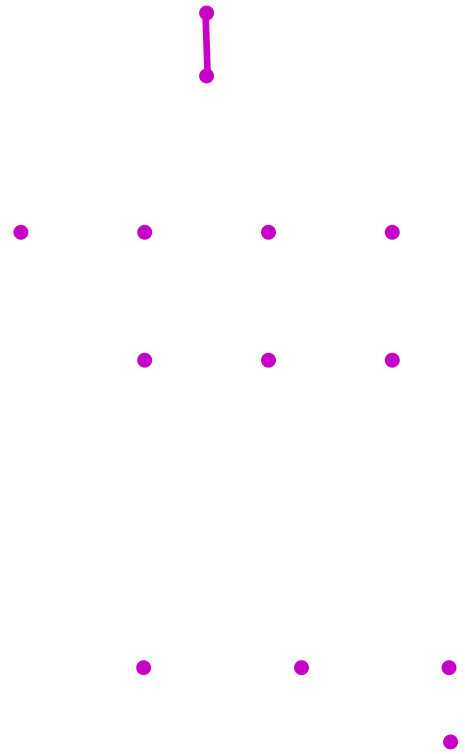
Forêt induite



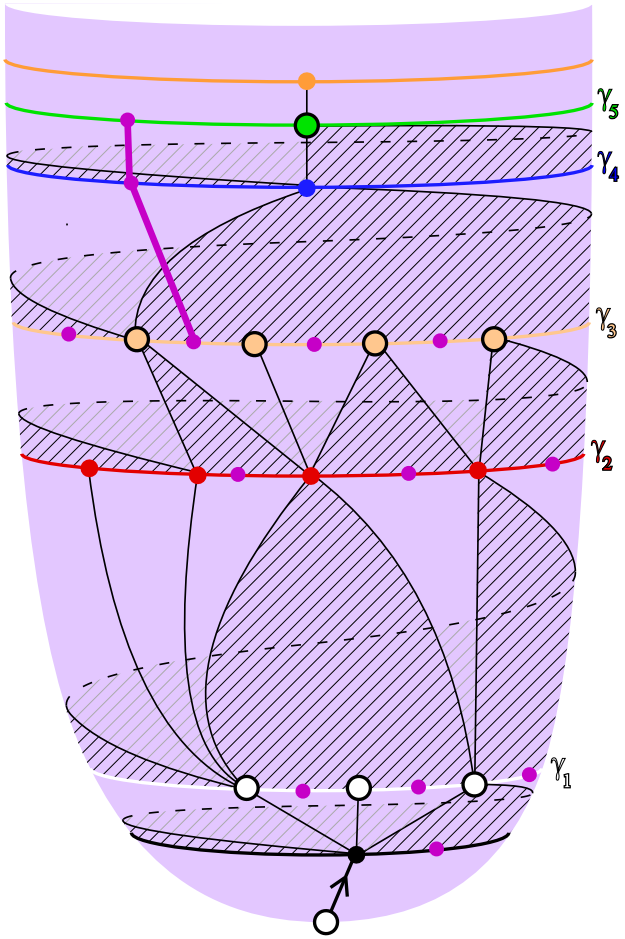


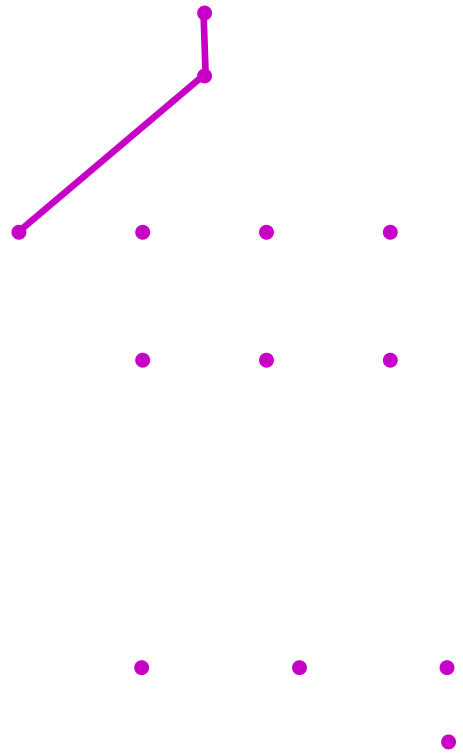
Forêt induite



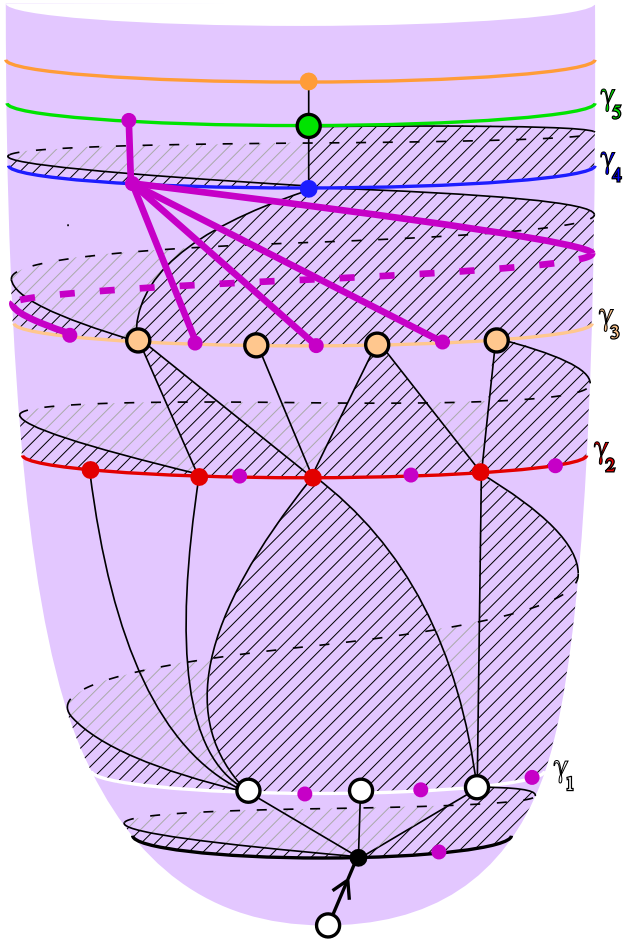


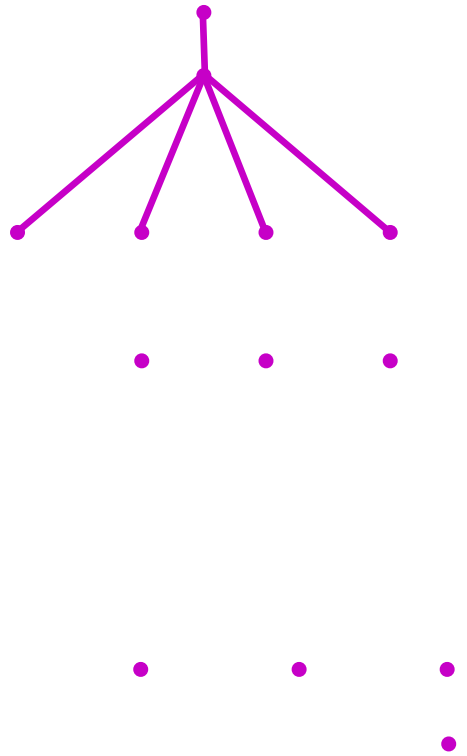
Forêt induite



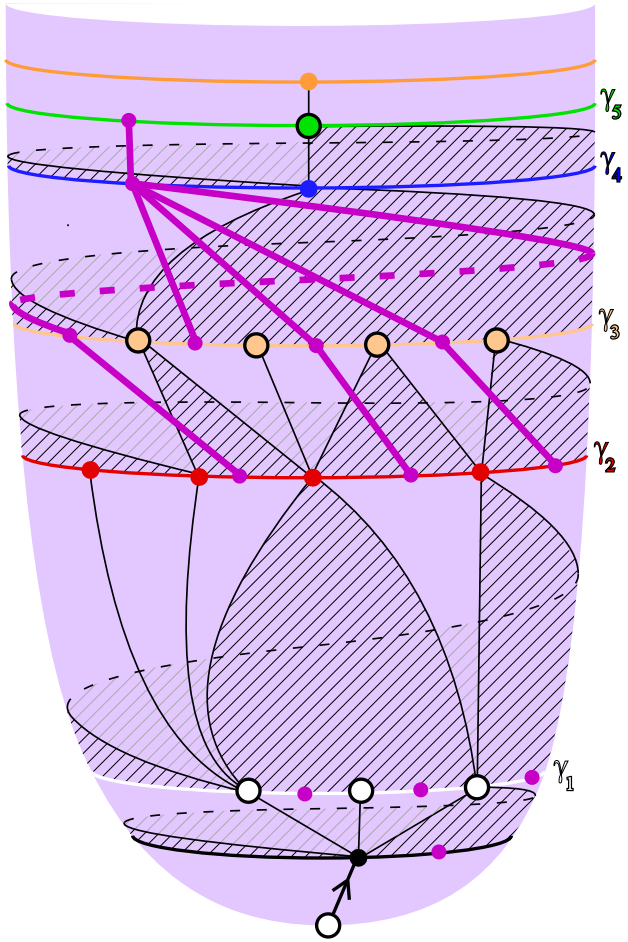


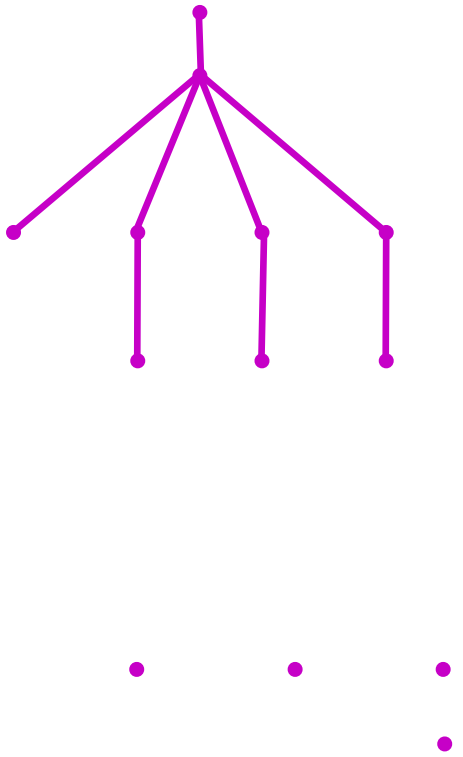
Forêt induite



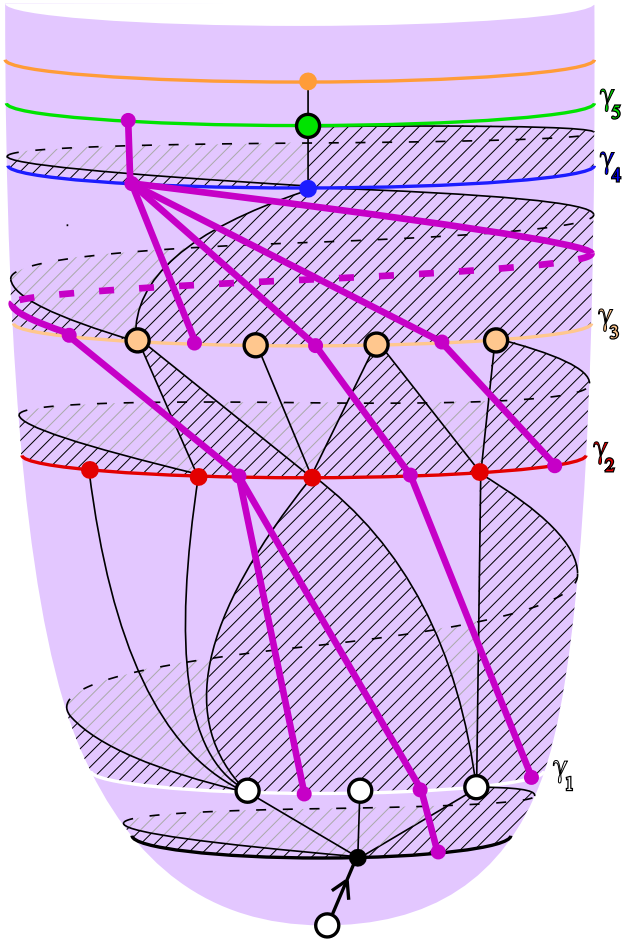


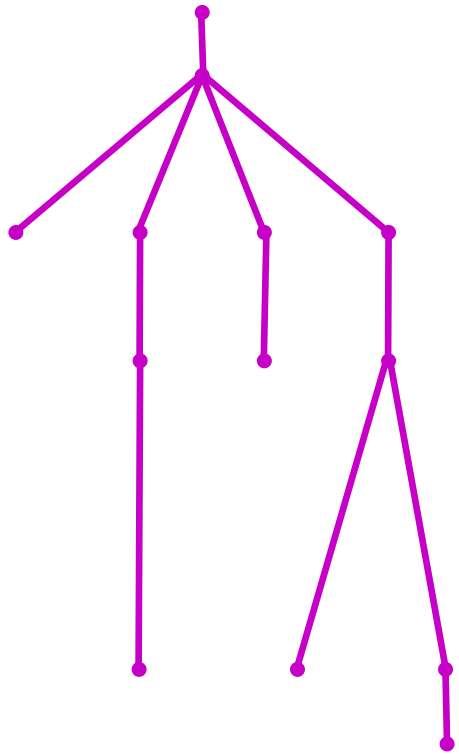
Forêt induite





Forêt induite





Probabilité qu'un processus de branchement ait une certaine trajectoire

- trajectoire d'un processus de branchement $\xi \leftrightsquigarrow$ forêt F
- nombre de particules à l'instant initial $\leftrightsquigarrow$ nombre d'arbres de F
- φ : fonction génératrice de la loi de reproduction de ξ
- probabilité que la trajectoire de ξ soit la forêt F :

$$\prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}] \varphi(t)$$

- $\mathrm{d}(v)$: nombre d'enfants du sommet v

Probabilité qu'un processus de branchement ait une certaine trajectoire

- trajectoire d'un processus de branchement ξ $\leftrightsquigarrow$ forêt F
- nombre de particules à l'instant initial $\leftrightsquigarrow$ nombre d'arbres de F
- φ : fonction génératrice de la loi de reproduction de ξ
- probabilité que la trajectoire de ξ soit la forêt F :

$$\prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}] \varphi(t)$$

- $\mathrm{d}(v)$: nombre d'enfants du sommet v

Probabilité qu'un processus de branchement ait une certaine trajectoire

- trajectoire d'un processus de branchement $\xi \leftrightsquigarrow$ forêt F
- nombre de particules à l'instant initial $\leftrightsquigarrow$ nombre d'arbres de F
- φ : fonction génératrice de la loi de reproduction de ξ
- probabilité que la trajectoire de ξ soit la forêt F :

$$\prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}] \varphi(t)$$

- $\mathrm{d}(v)$: nombre d'enfants du sommet v

Probabilité qu'un processus de branchement ait une certaine trajectoire

- trajectoire d'un processus de branchement $\xi \leftrightsquigarrow$ forêt F
- nombre de particules à l'instant initial $\leftrightsquigarrow$ nombre d'arbres de F
- φ : fonction génératrice de la loi de reproduction de ξ
- probabilité que la trajectoire de ξ soit la forêt F :

$$\prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}] \varphi(t)$$

- $\mathrm{d}(v)$: nombre d'enfants du sommet v

Probabilité d'avoir un squelette donné

- sommets de F : $v_1, v_2, \ldots, v_p$

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) = \sum_{K,\ Sq(K)\leftrightarrow F} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K)$$

$$= \sum_{n_1,\ldots,n_p=0}^{\infty} \sum_{K,\ Sq(K)\leftrightarrow F,\ \forall i,\, n_{v_i}=n_i} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K)$$

$$\to \sum_{n_1,\ldots,n_p=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{p} C(n_i, \mathrm{d}(v_i)+1)\right) \frac{b(m)}{b(1)}\, 12^{-\sum(n_i-1)}$$

$$= \frac{b(m)}{b(1)} \prod_{i=1}^{p} \sum_{n_i=0}^{\infty} C(n_i, \mathrm{d}(v_i)+1)\, 12^{-(n_i-1)}.$$

Probabilité d'avoir un squelette donné

- sommets de F : $v_1, v_2, \ldots, v_p$

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) = \sum_{K,\ Sq(K)\leftrightarrow F} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K)$$

$$= \sum_{n_1,\ldots,n_p=0}^{\infty} \sum_{K,\ Sq(K)\leftrightarrow F,\ \forall i,\, n_{v_i}=n_i} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K)$$

$$\to \sum_{n_1,\ldots,n_p=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{p} C(n_i, \mathrm{d}(v_i)+1)\right) \frac{b(m)}{b(1)}\, 12^{-\sum(n_i-1)}$$

$$= \frac{b(m)}{b(1)} \prod_{i=1}^{p} \sum_{n_i=0}^{\infty} C(n_i, \mathrm{d}(v_i)+1)\, 12^{-(n_i-1)}.$$

Probabilité d'avoir un squelette donné

- sommets de F : $v_1, v_2, \ldots, v_p$

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) = \sum_{K,\ Sq(K)\leftrightarrow F} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K)$$

$$= \sum_{n_1,\ldots,n_p=0}^{\infty} \sum_{K,\ Sq(K)\leftrightarrow F,\ \forall i,\, n_{v_i}=n_i} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K)$$

$$\to \sum_{n_1,\ldots,n_p=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{p} C(n_i, \mathrm{d}(v_i)+1)\right) \frac{b(m)}{b(1)}\, 12^{-\sum(n_i-1)}$$

$$= \frac{b(m)}{b(1)} \prod_{i=1}^{p} \sum_{n_i=0}^{\infty} C(n_i, \mathrm{d}(v_i)+1)\, 12^{-(n_i-1)}.$$

Probabilité d'avoir un squelette donné

- sommets de F : $v_1, v_2, \ldots, v_p$

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) = \sum_{K,\ Sq(K)\leftrightarrow F} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K)$$

$$= \sum_{n_1,\ldots,n_p=0}^{\infty} \sum_{K,\ Sq(K)\leftrightarrow F,\ \forall i,\, n_{v_i}=n_i} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K)$$

$$\to \sum_{n_1,\ldots,n_p=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{p} C(n_i, \mathrm{d}(v_i)+1)\right) \frac{b(m)}{b(1)}\, 12^{-\sum(n_i-1)}$$

$$= \frac{b(m)}{b(1)} \prod_{i=1}^{p} \sum_{n_i=0}^{\infty} C(n_i, \mathrm{d}(v_i)+1)\, 12^{-(n_i-1)}.$$

Probabilité d'avoir un squelette donné

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}]\varphi(t)$$

où

$$\varphi(t) = \frac{1}{2t}\left(\sqrt{(t-9)(t-1)^3} - 3 + 6t - t^2\right)$$

Table des matières

1. Définitions
   - Quadrangulations
   - Métrique
   - Enveloppe
2. Dénombrement de quadrangulations
   - Asymptotiques
   - Probabilité d'avoir une enveloppe donnée
3. Lien avec un processus de branchement
   - Tranches
   - Squelette
   - Processus de branchement
4. Applications

Principe général

On sait que

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}) \leftrightarrow F) = \frac{b(m)}{b(1)}\, 2^{m-1} \prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}]\varphi(t)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{q}\ldots) &= \frac{1}{m}\frac{b(m)}{b(1)}\, 2^{m-1} \sum_{F} \prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}]\varphi(t) \\ &= [t^m] f(t)\ \mathbb{P}(\xi\ldots) \end{aligned}$$

où

$$f(t) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\frac{b(m)}{b(1)}\, 2^{m-1} t^m = \frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{9-t}{1-t}} - 3\right)$$

Principe général

On sait que

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}) \leftrightarrow F) = \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}]\varphi(t)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{q}\ldots) &= \frac{1}{m}\frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \sum_{F} \prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}]\varphi(t) \\ &= [t^m] f(t)\, \mathbb{P}(\xi\ldots) \end{aligned}$$

où

$$f(t) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} t^m = \frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{9-t}{1-t}} - 3\right)$$

Principe général

On sait que

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}) \leftrightarrow F) = \frac{b(m)}{b(1)}\, 2^{m-1} \prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}]\varphi(t)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{q}\ldots) &= \frac{1}{m}\frac{b(m)}{b(1)}\, 2^{m-1} \sum_{F} \prod_{v \in F} [t^{\mathrm{d}(v)}]\varphi(t) \\ &= [t^m] f(t)\ \mathbb{P}(\xi\ldots) \end{aligned}$$

où

$$f(t) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\frac{b(m)}{b(1)}\, 2^{m-1} t^m = \frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{9-t}{1-t}} - 3\right)$$

Étude de $|\gamma_r|$

$$\mathbb{P}(|\gamma_r(\mathbf{q})| = m) = [t^m]f(t)\,\mathbb{P}(\xi_r = 1 \mid \xi_0 = m)$$

Théorème

La variable $|\gamma_r(\boldsymbol{q})|$ est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont données par

$$\mathbb{P}(|\gamma_{r+n}(\boldsymbol{q})| = k \mid |\gamma_r(\boldsymbol{q})| = l) = \frac{[t^k]f(t)}{[t^l]f(t)}\,\mathbb{P}(\xi_n = l \mid \xi_0 = k).$$

Étude de $|\gamma_r|$

$$\mathbb{P}(|\gamma_r(\mathbf{q})| = m) = [t^m]f(t)\ \mathbb{P}(\xi_r = 1 \mid \xi_0 = m)$$

Théorème

La variable $|\gamma_r(\boldsymbol{q})|$ est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont données par

$$\mathbb{P}(|\gamma_{r+n}(\boldsymbol{q})| = k \mid |\gamma_r(\boldsymbol{q})| = l) = \frac{[t^k]f(t)}{[t^l]f(t)}\ \mathbb{P}(\xi_n = l \mid \xi_0 = k).$$

Convergence de $|\gamma_r|$

Proposition

On a

$$2\,\frac{|\gamma_r(\boldsymbol{q})|}{r^2} \xrightarrow[r\to\infty]{(loi)} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

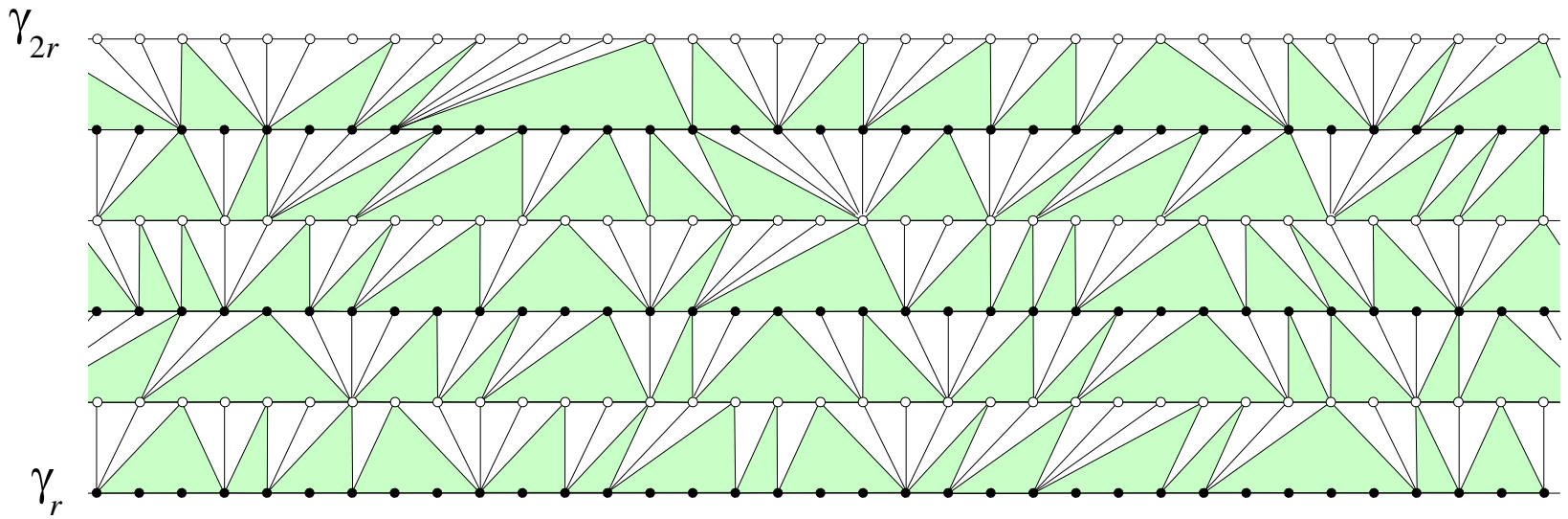
Proposition

Pour tout entier r, il existe dans $\boldsymbol{q}$ un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à r dont la longueur croît au plus linéairement en r.

Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

Proposition

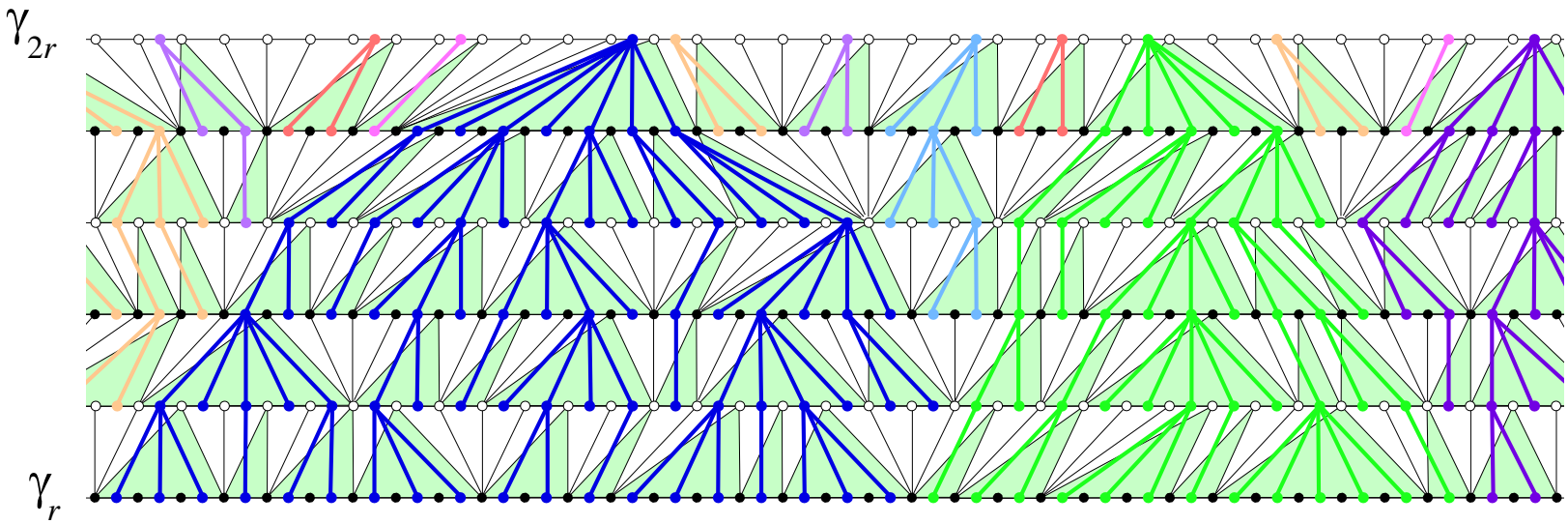
Pour tout entier r, il existe dans $\mathbf{q}$ un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à r dont la longueur croît au plus linéairement en r.



Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

Proposition

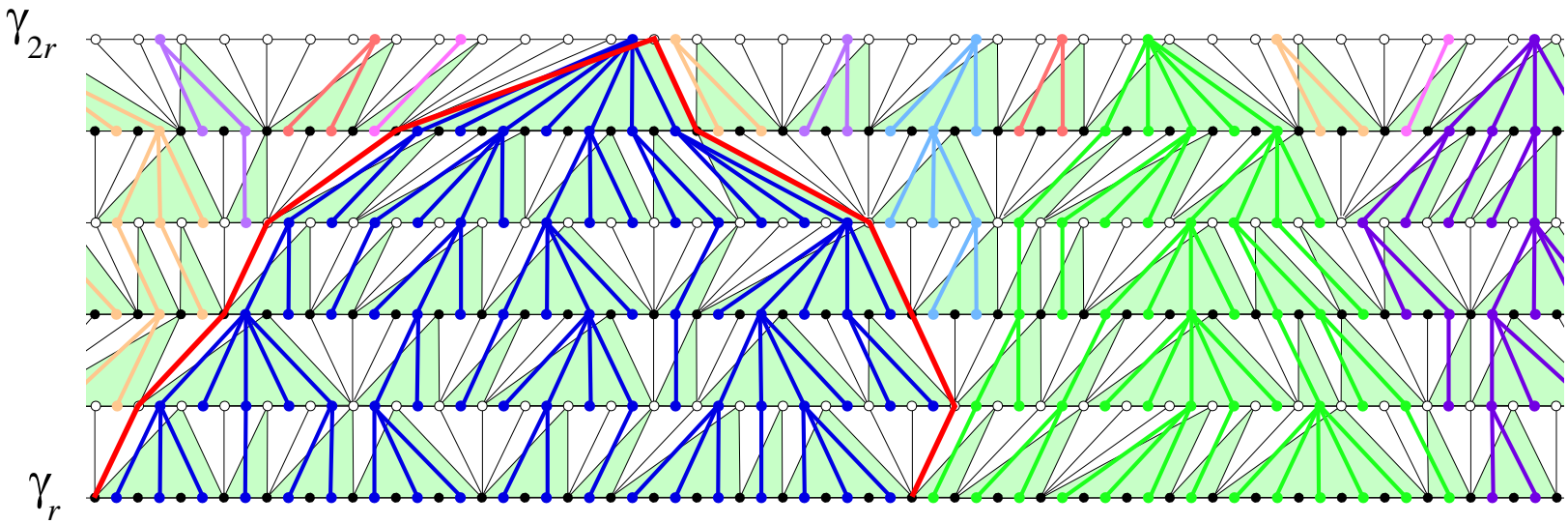
Pour tout entier r, il existe dans $\mathbf{q}$ un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à r dont la longueur croît au plus linéairement en r.



Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

Proposition

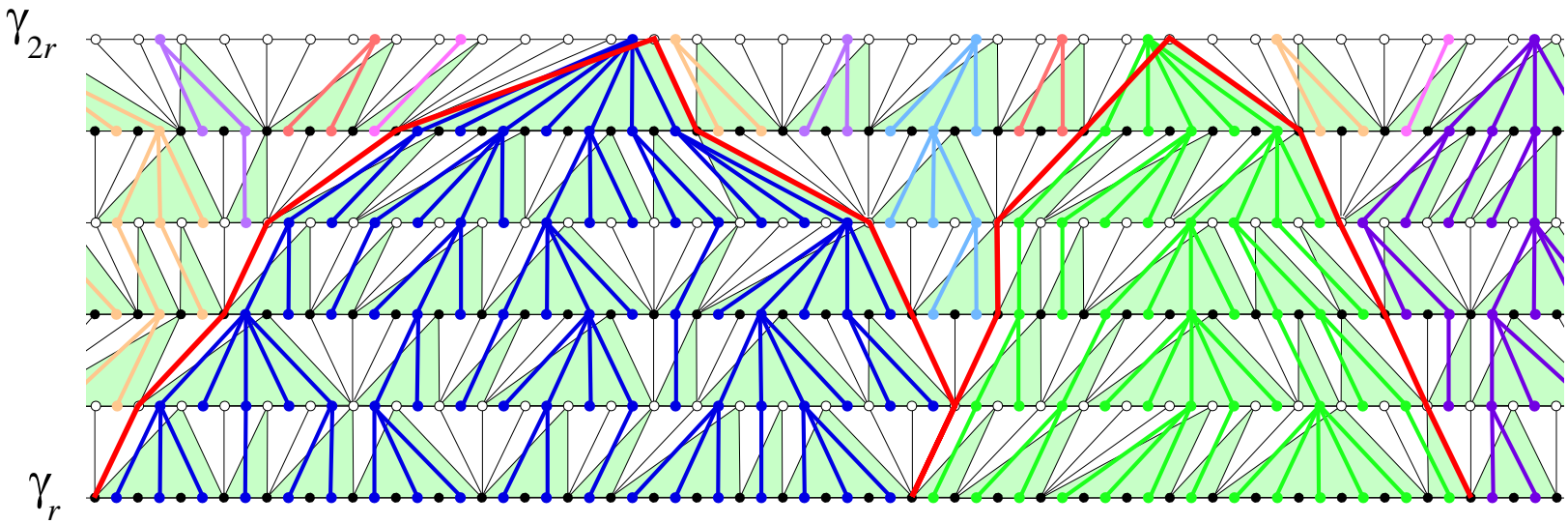
Pour tout entier r, il existe dans $\mathbf{q}$ un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à r dont la longueur croît au plus linéairement en r.



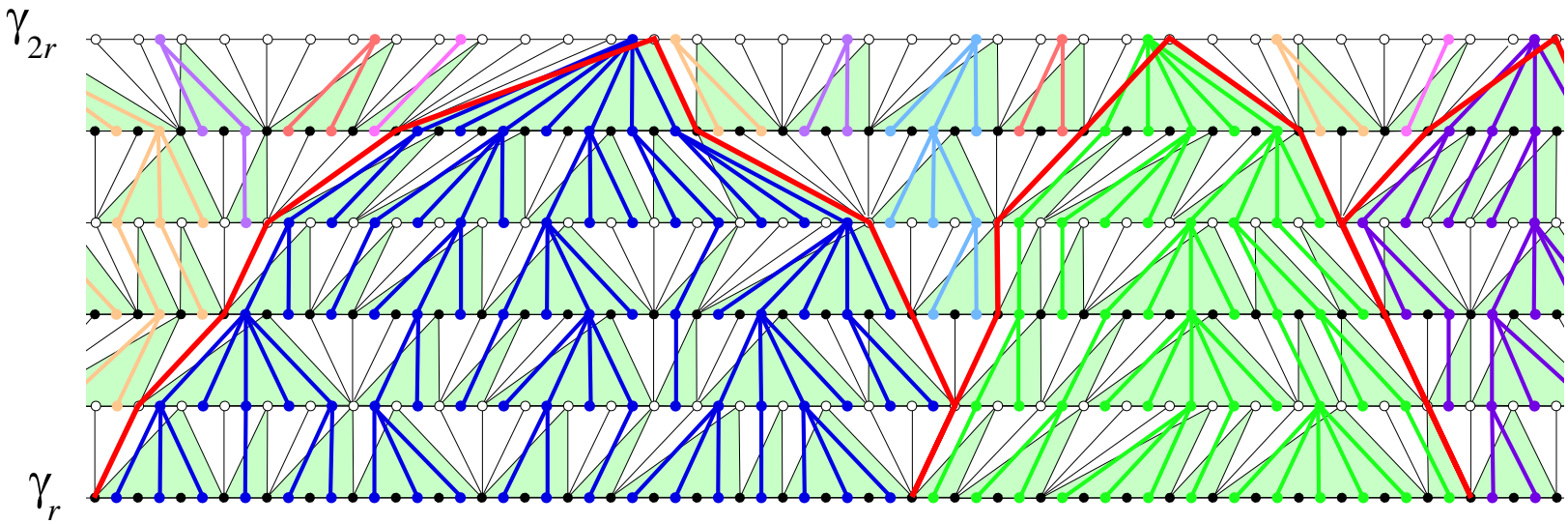
Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

Proposition

Pour tout entier r, il existe dans $\mathbf{q}$ un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à r dont la longueur croît au plus linéairement en r.



Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

Proposition

Pour tout entier r, il existe dans $\mathbf{q}$ un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à r dont la longueur croît au plus linéairement en r.