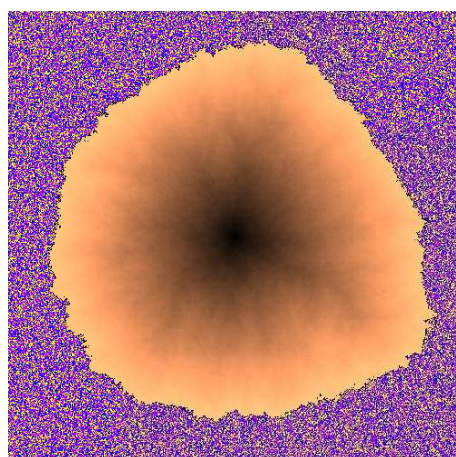


Percolation de premier passage  
et  
Coloriages aléatoires de  $\mathbb{Z}^d$

Jérémie BETTINELLI

Avril 2008



Mémoire réalisé sous la direction d'Olivier GARET

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Percolation de premier passage</b>	<b>2</b>
1.1 Modèle général . . . . .	2
1.2 Coloriages aléatoires . . . . .	4
1.2.1 Définitions et notations . . . . .	4
1.2.2 Lien avec le modèle général . . . . .	6
1.3 Constantes de temps . . . . .	6
1.3.1 Théorème sous-additif . . . . .	6
1.3.2 Cadre . . . . .	7
1.3.3 Constantes de temps . . . . .	9
1.4 Forme asymptotique . . . . .	10
1.4.1 Preuve du théorème . . . . .	10
1.4.2 Encadrement de $B_0$ . . . . .	15
1.5 Continuité de la constante de temps et critère de distinction dans le cas standard . .	16
1.5.1 Percolation classique sur $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	16
1.5.2 Percolation de premier passage par arêtes . . . . .	17
1.5.3 Percolation de premier passage par sites . . . . .	18
<b>2 Application aux coloriages aléatoires</b>	<b>19</b>
2.1 Rappel des principaux résultats . . . . .	19
2.2 Continuité de $\mu$ . . . . .	19
2.2.1 Restriction aux chemins “courts” . . . . .	19
2.2.2 Continuité des $\mu_n$ . . . . .	21
2.2.3 Continuité de $\mu$ . . . . .	23
2.3 Critère de distinction entre les cas $\mu = 0$ et $\mu > 0$ . . . . .	26
2.3.1 Résultats préliminaires . . . . .	26
2.3.2 Théorème . . . . .	31
2.4 Coloriages dépendants . . . . .	33
2.5 Quelques simulations . . . . .	35
<b>Références</b>	<b>38</b>

# Introduction

Au cours de ce mémoire, nous présentons le modèle de percolation de premier passage sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ . Nous supposons que la famille des temps d'arête a une loi invariante par translation et est ergodique (pour les translations). Nous établissons, dans le cas où les temps  $T(0, u)$ ,  $u \in \mathbb{Z}^d$ , sont  $\mathbb{L}^1$ , l'existence des constantes de temps, et démontrons une version du théorème de forme asymptotique (théorème 1.4.1) en supposant de plus que les temps d'arête sont bornés.

Dans un second temps, nous nous intéressons plus particulièrement aux coloriage aléatoires (indépendants) de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ . Nous montrons tout d'abord la continuité de la constante de temps en fonction de la loi des couleurs quand chaque couleur apparaît avec une probabilité strictement inférieure à l'inverse de la constante de connectivité du réseau (théorème 2.2.3).

Ensuite, nous regardons un critère de distinction entre les deux cas du théorème de forme asymptotique, à savoir qu'on a une "vraie" forme asymptotique (i.e. différente de  $\mathbb{R}^d$  tout entier) si et seulement si chaque couleur apparaît avec une probabilité strictement inférieure à  $p_c(\mathbb{Z}^d, \text{site})$  (théorème 2.3.6).

Enfin, nous étendons la suffisance de ce critère au cas des coloriage aléatoires dépendants, lorsque la famille de couleur a une loi invariante par translation et est ergodique (théorème 2.4.1).

Nous finissons par quelques illustrations de simulations informatiques de coloriage aléatoires de  $\mathbb{Z}^2$ .

# Chapitre 1

## Percolation de premier passage

Nous définissons au cours de ce chapitre le modèle de percolation de premier passage sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , faisons le lien avec celui des coloriage aléatoires, et démontrons les théorèmes généraux d'existence des constantes de temps et de forme asymptotique.

Nous finissons ce chapitre en donnant (sans démonstration) le théorème de continuité de la constante de temps dans le cas standard.

### 1.1 Modèle général

La percolation de premier passage a été introduite en 1965 par J. M. HAMMERSLEY et D. J. A. WELSH pour modéliser la propagation d'un fluide à travers un matériau poreux. Le matériau est modélisé par un graphe dont les arêtes nécessitent plus ou moins de temps pour être traversées par le fluide. Deux questions se posent alors : "Quand un sommet donné sera-t-il atteint ?" et "Comment évolue la zone imprégnée ?".

Ici, on considère le graphe  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$  dont les sommets sont les points de  $\mathbb{Z}^d$  et dont l'ensemble d'arêtes est

$$\mathbb{E}^d := \{(u, v) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d; |u - v| = 1\},$$

où  $|\cdot|$  est la norme 1 de  $\mathbb{R}^d$  (pour  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $|x| := \sum_{i=1}^d |x_i|$ ).

Le cas  $d = 1$  ne présentant pas beaucoup d'intérêt, on ne considérera dans ce rapport que le cas  $d \geq 2$ .

À chaque arête  $e \in \mathbb{E}^d$ , on associe un temps aléatoire positif  $t(e)$ , appelé **temps d'arête**, qui représente le temps mis par le fluide pour la traverser.

**Définition 1.1.1** Soient  $u$  et  $v$  deux points de  $\mathbb{Z}^d$ . Un **chemin** de  $u$  à  $v$  est une suite  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  d'arêtes telle que  $u \in e_1$ ,  $v \in e_n$ , et pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $e_i$  et  $e_{i+1}$  ont (au moins) un sommet en commun. Si  $\Gamma$  est un chemin de  $u$  à  $v$ , on note  $u \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} v$ .

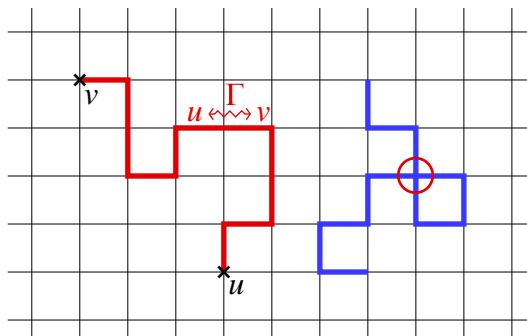


FIGURE 1.1 – Représentation de  $u \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} v$  et exemple de chemin **non** auto-évitant

**Définition 1.1.2** Un chemin  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est dit **auto-évitant** si :

- pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $e_i$  et  $e_{i+1}$  n'ont qu'un sommet en commun,
- pour  $1 \leq i \leq n-2$  et  $3 \leq j \leq n$  tels que  $|j-i| > 1$ ,  $e_i$  et  $e_j$  n'ont aucun sommet en commun.

Si  $\Gamma$  est un chemin auto-évitant de  $u$  à  $v$ , on notera  $u \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} v$ .

Soit  $\Gamma = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  un chemin, on lui associe le **temps de passage**

$$T(\Gamma) := \sum_{i=1}^n t(e_i),$$

qui représente le temps mis par le fluide pour parcourir ce chemin.

Enfin, pour  $u$  et  $v$  des points de  $\mathbb{Z}^d$ , on définit le **temps de voyage** de  $u$  à  $v$  par

$$T(u, v) := \inf_{u \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} v} T(\Gamma) = \inf_{u \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} v} T(\Gamma).$$

C'est le temps nécessaire au fluide pour se propager de  $u$  à  $v$ .

**Définition 1.1.3** Si un chemin  $u \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} v$  vérifie

$$T(\Gamma) = T(u, v),$$

on dit que c'est une **route** de  $u$  à  $v$ .

Pour simplifier certains résultats, on étend la notion de temps de voyage à  $\mathbb{R}^d$  tout entier. Pour cela, on associe de façon déterministe à tout point  $x \in \mathbb{R}^d$  un point  $x^* \in \mathbb{Z}^d$  qui minimise la distance  $|x - x^*|$ . En d'autres termes, on associe à  $x$  le point de  $\mathbb{Z}^d$  le plus proche, avec des règles déterministes pour départager en cas d'égalité. Ensuite, on définit naturellement, pour  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,

$$T(x, y) := T(x^*, y^*).$$

On a alors la proposition suivante, simple mais très utile.

**Proposition 1.1.4 (Inégalité triangulaire)** Quels que soient  $x, y, z$  dans  $\mathbb{R}^d$ , on a l'inégalité :

$$T(x, z) \leq T(x, y) + T(y, z).$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} T(x, z) &= T(x^*, z^*) \\ &= \inf \left\{ T(\Gamma) \mid x^* \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} z^* \right\} \\ &\leq \inf \left\{ T(\Gamma) \mid x^* \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} z^*, y^* \in \Gamma \right\} \\ &= \inf \left\{ T(\Gamma_1 \cdot \Gamma_2) \mid x^* \overset{\Gamma_1}{\rightsquigarrow} y^*, y^* \overset{\Gamma_2}{\rightsquigarrow} z^* \right\} \\ &= \inf \left\{ T(\Gamma_1) + T(\Gamma_2) \mid x^* \overset{\Gamma_1}{\rightsquigarrow} y^*, y^* \overset{\Gamma_2}{\rightsquigarrow} z^* \right\} \\ &= \inf \left\{ T(\Gamma_1) \mid x^* \overset{\Gamma_1}{\rightsquigarrow} y^* \right\} + \inf \left\{ T(\Gamma_2) \mid y^* \overset{\Gamma_2}{\rightsquigarrow} z^* \right\} \\ &= T(x^*, y^*) + T(y^*, z^*) \\ &= T(x, y) + T(y, z), \end{aligned}$$

où on a noté  $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$  la concaténation des chemins  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , c'est-à-dire que si  $\Gamma_1 = (e_1, \dots, e_k)$ ,  $\Gamma_2 = (f_1, \dots, f_l)$ , alors  $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 := (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l)$ . Bien sûr,  $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$  ne peut exister que s'il existe  $u, v, w \in \mathbb{Z}^d$  tels que  $u \overset{\Gamma_1}{\rightsquigarrow} v$  et  $v \overset{\Gamma_2}{\rightsquigarrow} w$  comme c'est le cas ici.  $\square$

Le premier point de vue consiste donc à regarder les quantités  $T(0, u)$  pour un  $u \in \mathbb{Z}^d$  donné (le point 0 étant l'origine de  $\mathbb{Z}^d$ , i.e.  $(0, 0, \dots, 0)$ ).

Le second consiste à s'intéresser à la zone imprégnée au temps  $t \in \mathbb{R}_+$  si le fluide part de l'origine, c'est-à-dire à

$$\tilde{B}(t) := \{u \in \mathbb{Z}^d \mid T(0, u) \leq t\}.$$

Pour simplifier les résultats concernant le comportement asymptotique de  $\tilde{B}(t)$ , on introduit l'ensemble

$$B(t) := \tilde{B}(t) + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d = \left\{u + (x_1, x_2, \dots, x_d) \mid u \in \tilde{B}(t); \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, -\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{1}{2}\right\}. \quad (1.1)$$

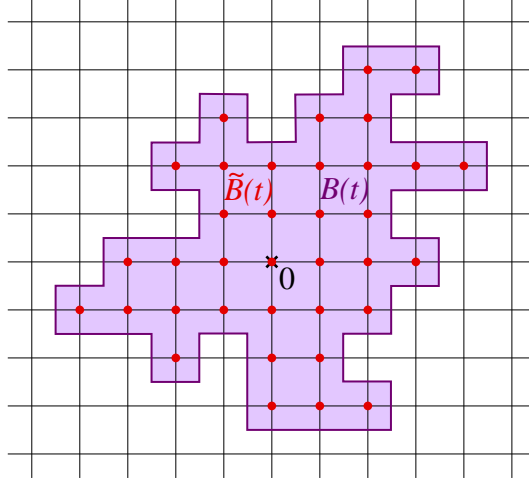


FIGURE 1.2 – Représentation des ensembles  $\tilde{B}(t)$  et  $B(t)$

On a alors clairement

$$\tilde{B}(t) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d \mid T(0, x) \leq t\} \subseteq \tilde{B}(t) + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d,$$

et donc

$$B(t) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid T(0, x) \leq t\}}. \quad (1.2)$$

Et enfin, pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , on notera  $\varepsilon_i$  l'arête  $(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  où le 1 est en  $i$ -ème position.

## 1.2 Coloriages aléatoires

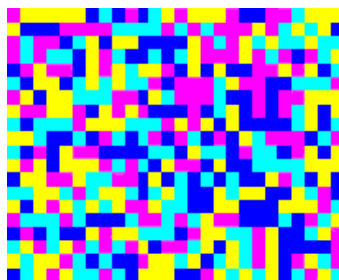
### 1.2.1 Définitions et notations

Les modèles les plus standards consistent à prendre les  $t(e)$  i.i.d., ou éventuellement indépendants dont la loi ne dépend que de la direction de l'arête<sup>1</sup>. Au cours de ce mémoire, on s'intéressera plus particulièrement au modèle de coloriage aléatoire, défini comme suit.

On se donne un ensemble  $\mathcal{S}$  fini ou dénombrable et une famille  $(X_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$  de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\mathcal{S}$ . Il faut imaginer les éléments de  $\mathcal{S}$  comme des **couleurs**, on colorie donc aléatoirement les sommets du graphe  $\mathbb{Z}^d$ .

Pour les représentations, on coloriera souvent tout l'ensemble  $u + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$  de la couleur du point  $u$  pour plus de clarté.

1. c'est-à-dire qu'il existe un probabilité  $\mu$  (resp.  $d$  probabilités  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ ) telle que la famille  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  soit distribuée selon  $\mu^{\otimes \mathbb{E}^d}$  (resp.  $\mu_1^{\otimes \mathbb{E}} \otimes \mu_2^{\otimes \mathbb{E}} \otimes \dots \otimes \mu_d^{\otimes \mathbb{E}}$ ).



**FIGURE 1.3** – Réalisation d'un coloriage aléatoire de  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathcal{S}$  contient 4 éléments, et les  $(X_u)_{u \in \mathbb{Z}^2}$  sont uniformes

**Définition 1.2.1** On appelle **cluster** de ce coloriage toute composante connexe du graphe aléatoire

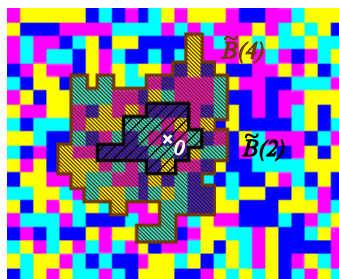
$$(\mathbb{Z}^d, \{\{u, v\} \in \mathbb{E}^d \mid X_u = X_v\}).$$



**FIGURE 1.4** – Exemple de cluster de la réalisation précédente (figure 1.3) situé dans le quart supérieur droit

Une façon de voir les choses consiste à imaginer le coloriage aléatoire comme une “carte géographique” et les clusters comme les “pays” de cette carte.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'ensemble  $\tilde{B}(n)$  des points que l'on peut atteindre en partant de l'origine en traversant au plus  $n$  “frontières”, c'est-à-dire l'ensemble des points de  $\mathbb{Z}^d$  tels qu'il existe un chemin les reliant à l'origine et qui contient moins de  $n$  arêtes dont les extrémités appartiennent à des clusters différents.



**FIGURE 1.5** – Représentation de  $\tilde{B}(2)$  et  $\tilde{B}(4)$  pour la réalisation de la figure 1.3

Ainsi, en notant, pour  $u \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\mathcal{C}(u)$  le cluster (aléatoire) contenant le point  $u$ , et pour  $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ ,  $\partial A$  sa frontière (extérieure), c'est-à-dire

$$\partial A := \{u \in \mathbb{Z}^d \setminus A \mid \exists v \in A, \{u, v\} \in \mathbb{E}^d\},$$

(voir figure 1.6) on obtient immédiatement la proposition suivante.

**Proposition 1.2.2** On a :

$$\tilde{B}(0) = \mathcal{C}(0)$$

et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\tilde{B}(n+1) = \tilde{B}(n) \cup \bigcup_{u \in \partial \tilde{B}(n)} \mathcal{C}(u).$$

**Remarque.** Cette proposition très simple est très utile pour programmer des simulations. On s'en servira au cours de la section 2.5.



FIGURE 1.6 – Représentation de  $\partial A$

## 1.2.2 Lien avec le modèle général

Il s'agit bien d'un modèle de percolation de premier passage. Les temps d'arête sont définis, pour  $\{u, v\} \in \mathbb{E}^d$ , par

$$t(\{u, v\}) = \mathbb{1}_{\{X_u \neq X_v\}}.$$

Ainsi, si on étend naturellement la définition donnée au cours de cette section de  $\tilde{B}(n)$  en posant, pour  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\tilde{B}(t) := \tilde{B}(\lfloor t \rfloor),$$

on voit aisément que cette définition coïncide avec celle donnée lors de la section 1.1.

### Remarques.

- i. Bien que la famille de variables aléatoires réelles  $(X_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$  soit i.i.d., les temps d'arête ne le sont pas. Ils ont même loi mais ne sont pas indépendants comme on peut le voir par exemple en prenant un carré unitaire (figure 1.7). Si trois des arêtes ont un temps nul, alors les quatre sommets du carré sont de la même couleur et le quatrième temps est nécessairement nul.
- ii. Néanmoins, deux arêtes qui n'ont aucun sommet en commun ont des temps indépendants. Cette remarque sera utilisée plus tard.

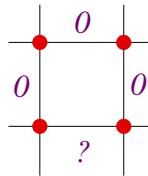


FIGURE 1.7 – Les temps d'arête ne sont pas indépendants

## 1.3 Constantes de temps

### 1.3.1 Théorème sous-additif

On aura besoin par la suite d'un résultat général, le théorème sous-additif ergodique. On en donne sans démonstration une version due à Thomas M. LIGGETT [13]. La version originale de ce théorème, due à John KINGMAN [12], aurait été suffisante pour son application à la percolation de premier passage, mais la version de LIGGETT est un peu plus précise.

**Théorème 1.3.1 (sous-additif ergodique)** Soit  $(X_{m,n})_{0 \leq m < n}$  une suite de variables aléatoires réelles telles que :

$$\forall 0 < m < n, X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n} \tag{1.3}$$

$$\text{la loi jointe de } (X_{k,n+k})_{n \geq 1} \text{ ne dépend pas de } k, \text{ pour } k \geq 0 \tag{1.4}$$

$$\text{pour tout } k \geq 1, (X_{kn,k(n+1)})_{n \geq 0} \text{ est un processus stationnaire}^2 \tag{1.5}$$

2. Un processus  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dit **stationnaire** si pour tout  $k$  et  $r$  entiers et pour tout choix d'entiers  $n_1, n_2, \dots, n_r$ , on a  $(Y_{n_1+k}, Y_{n_2+k}, \dots, Y_{n_r+k}) \stackrel{(loi)}{=} (Y_{n_1}, Y_{n_2}, \dots, Y_{n_r})$ .

$$\mathbb{E}[X_{0,1}^+] < \infty \quad \text{et} \quad \exists c \in \mathbb{R} \mid \forall n \geq 1, \mathbb{E}[X_{0,n}] \geq -cn \quad (1.6)$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[X_{0,n}]}{n} \text{ existe et vaut } \gamma := \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\mathbb{E}[X_{0,n}]}{n} \quad (1.7)$$

$$X := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n} \text{ existe p.s. et dans } \mathbb{L}^1 \text{ et } \mathbb{E}[X] = \gamma \quad (1.8)$$

De plus, si les processus définis en (1.5) sont ergodiques<sup>3</sup>, alors  $X = \gamma$  p.s.

**Remarque.** Dans la version de KINGMAN, les hypothèses (1.3), (1.4) et (1.5) sont remplacées par : quel que soit  $0 \leq l < m < n$ ,  $X_{l,n} \leq X_{l,m} + X_{m,n}$  et la loi jointe de  $(X_{m+k,n+k})_{0 \leq m < n}$  ne dépend pas de  $k$ , pour  $k \geq 0$ . Un exemple est donné dans LIGGETT [13] où les hypothèses faibles sont requises.

### 1.3.2 Cadre

On se place ici dans un cadre général qui comprend notamment les cas standards définis au début de la section 1.2.1 et le cas des coloriage aléatoires.

Commençons par quelques définitions et notations. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$\Lambda_n := \{\{u, v\} \in \mathbb{E}^d \mid u, v \in [-n, n]^d\},$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(t(e), e \in \Lambda_n),$$

$$\mathcal{F} := \sigma\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n\right) = \sigma(t(e), e \in \mathbb{E}^d),$$

et enfin

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n.$$

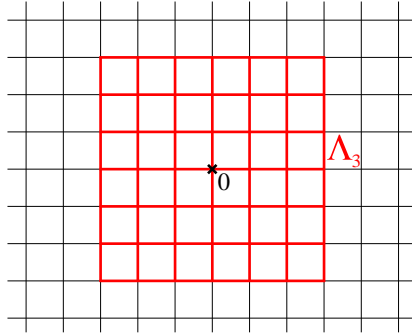


FIGURE 1.8 – Représentation de  $\Lambda_3$

**Remarque.** Ainsi,  $\mathcal{F}$  est la tribu des événements mesurables par rapport à l'état des arêtes de  $\mathbb{E}^d$ , et  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des événements qui ne dépendent que d'un nombre fini d'arêtes.

Pour  $u \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ , on note  $t^{+u}$  la configuration obtenue en translatant  $t = (t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  du vecteur  $u$ , c'est-à-dire

$$(t^{+u}(e))_{e \in \mathbb{E}^d} := (t(e - u))_{e \in \mathbb{E}^d}.$$

Pour un événement  $A \in \mathcal{F}$  et  $u \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ , on note encore  $A^{+u}$  l'événement translaté du vecteur  $u$ , c'est-à-dire

$$A^{+u} := \{t \mid t^{+u} \in A\}.$$

3. Soit un processus  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et l'application  $\varphi : (Y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (Y_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Alors  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dit **ergodique** si pour tout  $A \in \sigma((Y_n)_{n \in \mathbb{N}})$  tel que  $A = \varphi^{-1}(A)$  p.s., alors  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ .

**Définition 1.3.2** Un événement  $A \in \mathcal{F}$  est dit *invariant par translation* de vecteur  $u \in \mathbb{Z}^d$  si  $A^{+u} = A$ .

**Définition 1.3.3** On dit que la famille de temps d'arrêt  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  est *ergodique* si tout événement mesurable par rapport à  $\mathcal{F}$  et invariant par translation est de probabilité 0 ou 1.

On peut maintenant expliciter le cadre dans lequel on se place. On suppose simplement que la famille  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  a une loi invariante par translation (c'est-à-dire que la loi de  $(t(u+e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  ne dépend pas de  $u \in \mathbb{Z}^d$ ), est ergodique, et que  $\mathbb{E}[T(0, \varepsilon_1)] < \infty$ .

Il est clair que les modèles que l'on considère vérifient la première hypothèse<sup>4</sup>. La seconde est un peu plus délicate à montrer, elle fait l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 1.3.4** Dans le cas d'un modèle de percolation de premier passage standard<sup>5</sup> ou d'un coloriage aléatoire, la famille de temps d'arrêt  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  est ergodique.

**Preuve.** Soit  $A \in \mathcal{F}$  et  $u \in \mathbb{Z}^d$  tels que  $A^{+u} = A$ . Nous procédons en deux étapes.

1) La première consiste à approcher  $A$  par une suite d'événements  $(A_n)_{n \geq 1}$  mesurables par rapport à un nombre fini d'arêtes (c'est-à-dire appartenant à  $\mathcal{A}$ ). Pour cela, utilisons la martingale fermée  $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n]$  qui converge p.s. et dans  $\mathbb{L}^1$  vers  $\mathbb{1}_A$  pour définir

$$A_n := \left\{ \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n] > \frac{1}{2} \right\}.$$

La variable aléatoire  $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n]$  étant mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_n$ ,  $A_n \in \mathcal{F}_n$ . De plus, en notant  $\Delta$  la différence symétrique entre deux ensembles<sup>6</sup>, on a que

$$\mathbb{1}_{A \Delta A_n} \leq 2 \cdot |\mathbb{1}_A - \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n]|,$$

car sur l'ensemble  $A \setminus A_n$ ,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n] \leq \frac{1}{2}$$

donc

$$2 \cdot |\mathbb{1}_A - \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n]| = 2(1 - \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n]) \geq 1,$$

et sur  $A_n \setminus A$ ,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n] \geq \frac{1}{2}$$

donc

$$2 \cdot |\mathbb{1}_A - \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n]| = 2 \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n] \geq 1.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A \Delta A_n) \leq 2 \mathbb{E}[|\mathbb{1}_A - \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}_n]|] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (1.9)$$

2) Maintenant, remarquons que si une suite  $(B_n)_{n \geq 1}$  vérifie

$$\mathbb{P}(A \Delta B_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

alors

$$\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(A). \quad (1.10)$$

En effet

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_n \setminus A) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \setminus B_n),$$

et comme

$$\mathbb{P}(A \Delta B_n) = \mathbb{P}(B_n \setminus A) + \mathbb{P}(A \setminus B_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

chacun des deux termes  $\mathbb{P}(B_n \setminus A)$  et  $\mathbb{P}(A \setminus B_n)$  tend vers 0.

En utilisant le fait que pour  $X, Y, Z$  quelconques, on a  $\mathbb{P}(X \Delta (Y \cap Z)) = \mathbb{P}(X \cup Y^c \cup Z^c) + \mathbb{P}((Y \cap Z) \setminus X) \leq \mathbb{P}(X \cup Y^c) + \mathbb{P}(X \cup Z^c) + \mathbb{P}(Y \setminus X) \leq \mathbb{P}(X \Delta Y) + \mathbb{P}(X \Delta Z)$ , on trouve que

4. Rappelons que l'on a défini au début de la section 1.2.1 un coloriage aléatoire en prenant des variables aléatoires i.i.d.

5. défini au début de la section 1.2.1

6. Par définition,  $A \Delta B := A \setminus B \cup B \setminus A$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\Delta(A_n \cap A_n^{+3nu})) &\leq \mathbb{P}(A\Delta A_n) + \mathbb{P}(A\Delta A_n^{+3nu}) \\
&= \mathbb{P}(A\Delta A_n) + \mathbb{P}(A^{+3nu}\Delta A_n^{+3nu}) \\
&= \mathbb{P}(A\Delta A_n) + \mathbb{P}((A\Delta A_n)^{+3nu}) \\
&= 2\mathbb{P}(A\Delta A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.
\end{aligned}$$

On a utilisé dans la deuxième ligne que  $A^{+3nu} = A$ , et dans la quatrième que la loi des  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  est invariante par translation.

Ainsi, d'après (1.10),

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_n^{+3nu}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(A).$$

Or,  $A_n$  étant dans  $\mathcal{F}_n$ ,  $A_n$  et  $A_n^{+3nu}$  sont indépendants car  $[-n, n]^d$  et  $3nu + [-n, n]^d$  n'ont aucun point commun. Cela est immédiat dans un cas de percolation de premier passage standard car les  $t(e)$ ,  $e \in \mathbb{E}^d$ , sont indépendants. Dans le cas d'un coloriage aléatoire, les  $(X_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$  étant indépendantes, les arêtes qui ne se "touchent" pas ont aussi des temps indépendants, donc les arêtes de  $\Lambda_n$  et celles de  $3nu + \Lambda_n$  ont des temps indépendants.

En combinant (1.9) et (1.10), il vient,

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_n^{+3nu}) = \mathbb{P}(A_n)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(A)^2,$$

et enfin

$$\mathbb{P}(A)^2 = \mathbb{P}(A),$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

Enfin, dans le cas de coloriage aléatoire, la troisième hypothèse est clairement vérifiée car  $T(0, \varepsilon_1) \leq t(\{0, \varepsilon_1\}) \leq 1$ . Dans les cas standards, il faut rajouter une hypothèse, comme par exemple,  $\mathbb{E}[t(\{0, \varepsilon_1\})] < \infty$ . Il existe des hypothèses plus faibles (voir HOWARD [9] ou KESTEN [11]) mais nous n'entrerons pas dans les détails ici.

### 1.3.3 Constantes de temps

Avant de s'intéresser au comportement de  $B(t)$ , on commence par regarder ce qu'il se passe dans une direction fixée. En l'occurrence, on privilégie la direction de  $\varepsilon_1$ .

Pour  $0 \leq m < n$ , on définit les variables aléatoires

$$T(m, n) := T(m\varepsilon_1, n\varepsilon_1)$$

auxquelles on va appliquer le théorème sous-additif ergodique (théorème 1.3.1).

L'inégalité triangulaire (proposition 1.1.4) appliquée aux points  $0$ ,  $m\varepsilon_1$  et  $n\varepsilon_1$  nous donne l'hypothèse (1.3). Les conditions (1.4) et (1.5) sont vérifiées car la loi de  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  est invariante par translation, donc aussi celle de  $(T(u, v))_{u, v \in \mathbb{Z}^d}$ .

La condition (1.6) est vérifiée en prenant  $c = 0$  car  $T(0, 1) \geq 0$  et on a supposé  $\mathbb{E}[T(0, 1)] < \infty$ .

Enfin, pour  $k \geq 1$ , le processus  $T(kn, k(n+1))_{n \geq 0}$  est ergodique car les ensembles invariants de  $\sigma(T(kn, k(n+1)), n \geq 0)$  sont des ensembles de  $\sigma(t(e), e \in \mathbb{E}^d)$  qui sont invariants par translation de vecteur  $k\varepsilon_1$ , et donc de probabilité 0 ou 1 car on a choisi la famille  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  ergodique.

On peut donc appliquer le théorème 1.3.1. Bien sûr, il est possible de mener le même raisonnement dans n'importe quelle direction  $\varepsilon_i$ , on obtient ainsi la proposition suivante :

**Proposition 1.3.5** *Soit un modèle de percolation de premier passage tel que la famille de temps d'arête  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  ait une loi invariante par translation et soit ergodique. Si  $\mathbb{E}[T(0, \varepsilon_i)] < \infty$ , alors il existe une constante  $\mu_i \in \mathbb{R}_+$  telle que*

$$\frac{T(0, n\varepsilon_i)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s., \mathbb{L}^1} \mu_i.$$

**Définition 1.3.6** *Les constantes  $\mu_i$  introduites dans la proposition précédente sont appelées les constantes de temps. Lorsqu'elles sont toutes égales, on note  $\mu$  la valeur commune et on la nomme constante de temps.*

**Remarque.** Dans le cas i.i.d. ainsi que dans le cas de coloriage aléatoire, il est évident que la loi de  $T(0, n\varepsilon_i)$  ne dépend pas de  $i$ , on est donc en mesure de parler de constante de temps au singulier.

## 1.4 Forme asymptotique

### 1.4.1 Preuve du théorème

On s'intéresse à présent à la forme asymptotique de  $B(t)$  définie par (1.1) lorsque  $t \rightarrow \infty$ . On donne ici une version un peu modifiée de la version originale du théorème de forme asymptotique de RICHARDSON. La version classique est donnée par exemple dans HOWARD [9] ou KESTEN [11], mais elle ne s'applique pas directement au cas des coloriage aléatoires. Nous établirons dans ce mémoire la version due à Y. DERRIENNIC, comme reporté page 259 de KESTEN [11].

Dans une version plus récente due à Daniel BOIVIN, l'hypothèse que les  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  sont bornés est allégée (c.f. BOIVIN [1]).

**Théorème 1.4.1** *Soit un modèle de percolation de premier passage tel que la famille de temps d'arête  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  ait une loi invariante par translation et soit ergodique. On suppose de plus les  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  bornés. Alors on a :*

- i. Si pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\mu_i > 0$ , alors il existe un convexe compact déterministe d'intérieur non vide  $B_0 \subseteq \mathbb{R}^d$ , symétrique par rapport aux hyperplans d'équation  $x_i = 0$ , tel que, p.s., pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour  $t$  assez grand, on ait*

$$(1 - \varepsilon)B_0 \subseteq \frac{1}{t}B(t) \subseteq (1 + \varepsilon)B_0.$$

- ii. Si pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\mu_i = 0$ , alors, p.s., pour tout compact  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ , pour  $t$  assez grand, on a*

$$K \subseteq \frac{1}{t}B(t).$$

**Preuve.** 1) On commence par établir la convergence radiale, c'est-à-dire de

$$\frac{T(0, n\hat{x})}{n}$$

pour  $\hat{x}$  dans un ensemble dense de la sphère unitaire. On note  $C$  un majorant des  $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$  (qui existe car il y a au plus  $d$  lois différentes, compte tenu de l'invariance par translation).

Pour  $u \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ , on applique le même raisonnement qu'à la section 1.3.3, en remplaçant  $\varepsilon_1$  par  $u$ . Le seul point qui diffère est qu'il faut montrer que  $\mathbb{E}[T(0, u)]$  est finie, ce qui est évident car

$$\mathbb{E}[T(0, u)] \leq C|u| < \infty.$$

Ainsi,

$$\frac{T(0, nu)}{n\|u\|}$$

converge p.s. et dans  $\mathbb{L}^1$  (où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^d$ ). Cette limite ne dépend que de la direction de  $u$ ,

$$\hat{u} := \frac{u}{\|u\|},$$

car si  $v$  a la même direction, il existe  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{N}^*$  tels que  $pu = qv$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(0, npu)}{np\|u\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(0, nqv)}{nq\|v\|}.$$

Notons  $\mu(\hat{u})$  cette limite. Montrons que c'est aussi la limite p.s. et  $\mathbb{L}^1$  de

$$\frac{T(0, r\hat{u})}{r}$$

quand  $r$  tend vers l'infini ( $r$  réel). Pour cela, il suffit de voir que

$$\left| \frac{1}{r}T(0, r\hat{u}) - \frac{1}{r}T\left(0, \left\lfloor \frac{r}{\|u\|} \right\rfloor u\right) \right| \leq \frac{1}{r}T\left(r\hat{u}, \left\lfloor \frac{r}{\|u\|} \right\rfloor u\right) \leq \frac{C}{r} \left[ \left( \frac{r}{\|u\|} - \left\lfloor \frac{r}{\|u\|} \right\rfloor \right) |u| + 2 \right] \leq \frac{C}{r} (|u| + 2) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$$

et

$$\frac{1}{r}T\left(0, \left\lfloor \frac{r}{\|u\|} \right\rfloor u\right) = \left\lfloor \frac{r}{\|u\|} \right\rfloor \frac{\|u\|}{r} \frac{1}{\left\lfloor \frac{r}{\|u\|} \right\rfloor \|u\|} T\left(0, \left\lfloor \frac{r}{\|u\|} \right\rfloor u\right) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\text{p.s., } \mathbb{L}^1} \mu(\hat{u}).$$

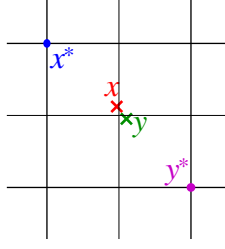


FIGURE 1.9 – Exemple de cas où  $|x - y| < |x^* - y^*|$

Le +2 du dernier membre de la première ligne provient du fait que  $r\hat{u}$  n'est pas nécessairement dans  $\mathbb{Z}^d$ , et il se peut que  $|x - y| < |x^* - y^*|$ , mais on a toujours  $|x^* - y^*| \leq |x - y| + 2$  grâce à l'inégalité triangulaire (c.f. figure 1.9). On a ainsi montré la convergence pour l'ensemble

$$U := \left\{ \frac{u}{\|u\|}, u \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

dense dans la sphère de  $\mathbb{R}^d$ , que l'on note  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

2) Maintenant, pour  $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{S}^{d-1}$ , on a

$$\left| \frac{T(0, r\hat{x})}{r} - \frac{T(0, r\hat{y})}{r} \right| \leq \frac{T(r\hat{x}, r\hat{y})}{r} \leq C \frac{r|\hat{x} - \hat{y}| + 2}{r} = C \left( |\hat{x} - \hat{y}| + \frac{2}{r} \right),$$

donc,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{T(0, r\hat{x})}{r} - \frac{T(0, r\hat{y})}{r} \right| \leq C|\hat{x} - \hat{y}|. \quad (1.11)$$

L'ensemble  $U$  étant dénombrable, on a p.s., pour tout  $\hat{x}, \hat{y} \in U$ ,

$$|\mu(\hat{x}) - \mu(\hat{y})| \leq C|\hat{x} - \hat{y}|.$$

Sur l'ensemble de mesure 1 où ces inégalités ont lieu, la fonction  $\mu$  définie sur  $U$  est donc lipschitzienne, on peut la prolonger à  $\mathbb{S}^{d-1}$  d'après le théorème de prolongement des applications uniformément continues. On a donc, sur cet ensemble de mesure 1, que quels que soient  $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,

$$|\mu(\hat{x}) - \mu(\hat{y})| \leq C|\hat{x} - \hat{y}|.$$

De plus, en prenant  $\hat{x} \in \mathbb{S}^{d-1}$  et une suite  $(\hat{x}_n) \in U^{\mathbb{N}}$  telle que  $\hat{x}_n \rightarrow \hat{x}$ , l'équation (1.11) appliquée à  $\hat{x}$  et  $\hat{x}_n$  devient

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{T(0, r\hat{x})}{r} - \mu(\hat{x}_n) \right| \leq C|\hat{x} - \hat{x}_n|,$$

puis en prenant la limite quand  $n$  tend vers l'infini, on obtient que, p.s., quel que soit  $\hat{x} \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(0, r\hat{x})}{r} = \mu(\hat{x}), \quad (1.12)$$

3) On va à présent montrer que, p.s.,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \left| \frac{T(0, x)}{\|x\|} - \mu \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right| = 0.$$

Pour ce faire, fixons  $\varepsilon \in (0, 1)$ , et découpons  $\mathbb{R}^d$  en un nombre fini de "secteurs angulaires" de la manière suivante : choisissons  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m \in \mathbb{S}^{d-1}$  tels que

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{a \geq 0} B(a\hat{\alpha}_i, a\varepsilon).$$

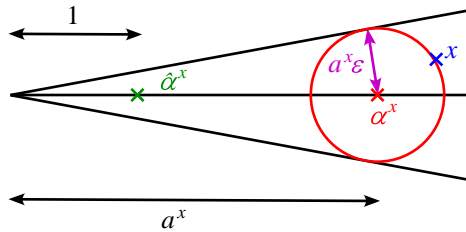


FIGURE 1.10 – Notations

Pour  $x \in \mathbb{R}^d$ , soit  $\hat{\alpha}^x \in \{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m\}$  tel que

$$x \in \bigcup_{a \geq 0} B(a\hat{\alpha}^x, a\varepsilon),$$

$$a^x := \inf\{a \mid x \in B(a\hat{\alpha}^x, a\varepsilon)\}$$

et enfin,

$$\alpha^x := a^x \hat{\alpha}^x.$$

On a alors les inégalités suivantes :

$$a^x \leq \|x\| \leq a^x(1 + \varepsilon) \quad \text{et} \quad |x - \alpha^x| \leq 2a^x\varepsilon. \quad (1.13)$$

En notant toujours  $\hat{x} := \frac{x}{\|x\|}$ , il vient,

$$\begin{aligned} \left| \frac{T(0, x)}{\|x\|} - \mu(\hat{x}) \right| &\leq \left| \frac{T(0, x)}{\|x\|} - \frac{T(0, \alpha^x)}{\|\alpha^x\|} \right| + \left| \frac{T(0, \alpha^x)}{\|\alpha^x\|} - \frac{a^x}{\|x\|} \mu(\hat{\alpha}^x) \right| \\ &\quad + \left| \frac{a^x}{\|x\|} \mu(\hat{\alpha}^x) - \mu(\hat{\alpha}^x) \right| + |\mu(\hat{\alpha}^x) - \mu(\hat{x})|. \end{aligned}$$

Traitons séparément les quatre parties du membre de droite.

i.

$$\left| \frac{T(0, x)}{\|x\|} - \frac{T(0, \alpha^x)}{\|\alpha^x\|} \right| \leq \frac{T(x, \alpha^x)}{\|x\|} \leq C \frac{|x - \alpha^x| + 2}{\|x\|} \leq C \frac{2a^x\varepsilon + 2}{\|x\|} \leq C \frac{2\|x\|\varepsilon + 2}{\|x\|},$$

donc

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left| \frac{T(0, x)}{\|x\|} - \frac{T(0, \alpha^x)}{\|\alpha^x\|} \right| \leq 2C\varepsilon.$$

ii.

$$\left| \frac{T(0, \alpha^x)}{\|\alpha^x\|} - \frac{a^x}{\|x\|} \mu(\hat{\alpha}^x) \right| = \frac{a^x}{\|x\|} \left| \frac{T(0, \alpha^x)}{a^x} - \mu(\hat{\alpha}^x) \right| \leq \left| \frac{T(0, \alpha^x)}{a^x} - \mu(\hat{\alpha}^x) \right|,$$

et comme d'après (1.13),  $a^x \rightarrow \infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$ , l'équation (1.12) implique que, p.s.,

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left| \frac{T(0, \alpha^x)}{\|\alpha^x\|} - \frac{a^x}{\|x\|} \mu(\hat{\alpha}^x) \right| = 0.$$

iii.

$$\left| \frac{a^x}{\|x\|} \mu(\hat{\alpha}^x) - \mu(\hat{\alpha}^x) \right| \leq \left| \frac{a^x}{\|x\|} - 1 \right| \cdot \sup_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu \leq \varepsilon \sup_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu,$$

la dernière inégalité résultant de (1.13). La fonction  $\mu$  étant continue sur le compact  $\mathbb{S}^{d-1}$ ,  $\sup_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu < \infty$ .

iv.

$$|\mu(\hat{\alpha}^x) - \mu(\hat{x})| \leq C|\hat{\alpha}^x - \hat{x}| \leq C\sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})} \leq 2C\varepsilon.$$

Ainsi, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 suivant un ensemble dénombrable, on obtient bien que, p.s.,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \left| \frac{T(0, x)}{\|x\|} - \mu\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| = 0. \quad (1.14)$$

4) Étudions à présent les propriétés de la fonction  $\mu$ . Pour des raisons pratiques, on l'étend à  $\mathbb{R}^d$  en posant, pour  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mu(x) := \|x\|\mu(\hat{x}).$$

Ainsi, en faisant le changement  $r \mapsto r\|x\|$ , l'équation (1.12) devient : p.s., quel que soit  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(0, rx)}{r} = \mu(x). \quad (1.15)$$

Remarquons que, si on choisit une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels telle que  $r_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$  et telle que tous les  $r_n x$  et  $r_n y$  soient dans  $\mathbb{Z}^d$ , on a,

$$\left| \frac{T(0, r_n y)}{r_n} - \frac{T(0, r_n x)}{r_n} \right| \leq \frac{T(r_n x, r_n y)}{r_n} \stackrel{(loi)}{=} \frac{T(0, r_n(y-x))}{r_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu(y-x),$$

où  $\xrightarrow{\mathbb{P}}$  désigne la limite en probabilité.

Le fait que  $r_n x$  et  $r_n y$  soient dans  $\mathbb{Z}^d$  assure l'égalité en loi par invariance par translation de la loi des arêtes.

Sans cette hypothèse, on pourrait se trouver dans un cas où  $T(x, y) \stackrel{(loi)}{\neq} T(0, y-x)$ , si  $(y-x)^* \neq y^* - x^*$ , comme le montre la figure 1.11.

Par suite, en prenant la limite en probabilité dans l'équation précédente, on obtient que  $\mu$  vérifie l'inégalité triangulaire : p.s., pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,

$$|\mu(y) - \mu(x)| \leq \mu(y-x). \quad (1.16)$$

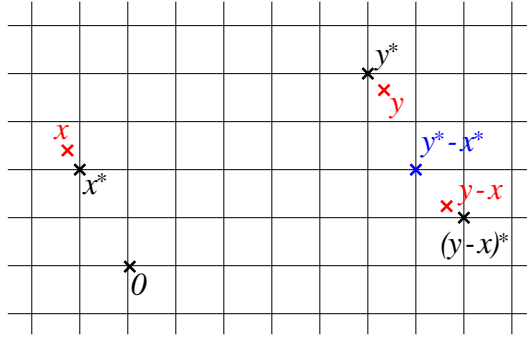


FIGURE 1.11 – Exemple de cas où  $(y-x)^* \neq y^* - x^*$

De plus, l'invariance par translation implique que, quels que soient  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,

$$T(0, (x_1, x_2, \dots, x_d)) \stackrel{(loi)}{=} T(0, (\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_d)),$$

sauf éventuellement pour les points "critiques" dont une coordonnée appartient à  $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . Cependant, il est possible de choisir les règles de définition de  $x^*$  de telle façon que ce ne soit pas le cas.

Dans tous les cas, pour un  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  fixé, en choisissant une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convenable qui évite ces points, on obtient

$$\mu(x_1, x_2, \dots, x_d) = \mu(\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_d). \quad (1.17)$$

Les équations (1.16) et (1.17) impliquent les propriétés suivantes :

i. Si pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\mu_i > 0$ , alors

$$\inf_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu > 0. \quad (1.18)$$

ii. Si pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\mu_i = 0$ , alors

$$\mu \equiv 0. \quad (1.19)$$

En effet, s'il existe  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{S}^{d-1}$  tel que  $\mu((x_1, x_2, \dots, x_d)) = 0$ , alors soit  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  tel que  $x_i \neq 0$ , on a

$$\mu_i = \mu(\varepsilon_i) \leq \frac{1}{2|x_i|} (\mu((x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, |x_i|, x_{i+1}, \dots, x_d)) + \mu((-x_1, -x_2, \dots, -x_{i-1}, |x_i|, -x_{i+1}, \dots, -x_d))) = 0,$$

et pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mu((x_1, x_2, \dots, x_d)) \leq \sum_{i=1}^d |x_i| \mu_i.$$

5) On est maintenant en mesure de conclure. Dans le premier cas, définissons

$$B_0 := \{x \mid \mu(x) \leq 1\} = \{\lambda x \mid \lambda \mu(\hat{x}) \leq 1\}.$$

C'est un convexe : Si  $x, y \in B_0$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ , d'après (1.16),

$$\mu(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \mu(\lambda x) + \mu((1-\lambda)y) = \lambda \mu(x) + (1-\lambda)\mu(y) \leq 1.$$

C'est un compact d'intérieur non vide compte tenu de (1.18), symétrique par rapport aux hyperplans d'équation  $x_i = 0$  à cause de (1.17). Notons

$$m := \inf_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu > 0.$$

Plaçons nous sur l'ensemble de mesure 1 sur lequel (1.14) a lieu. Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrons que pour  $t$  assez grand, on a

$$(1-\varepsilon)B_0 \subseteq \frac{1}{t}B(t) \subseteq (1+\varepsilon)B_0.$$

Pour  $\eta$  dont on fixera la valeur ultérieurement, il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que, dès que  $\|x\| \geq M$ ,

$$\mu(x) - \eta\|x\| \leq T(0, x) \leq \mu(x) + \eta\|x\|. \quad (1.20)$$

a)  $(1-\varepsilon)tB_0 \subseteq B(t)$  :

Soit  $(1-\varepsilon)t\lambda\hat{x} \in (1-\varepsilon)tB_0$ , on a donc  $\lambda\mu(\hat{x}) \leq 1$ . Montrons que

$$T(0, (1-\varepsilon)t\lambda\hat{x}) \leq t$$

pour  $t$  assez grand. Cela suffira étant donné la définition (1.2) de  $B(t)$ .

Prenons pour  $\eta$  la valeur  $m\varepsilon$ . Alors, si

$$\lambda \leq \frac{1}{4C(1-\varepsilon)} \quad \text{et} \quad t \geq 2C,$$

il vient

$$T(0, (1 - \varepsilon)t\lambda\hat{x}) \leq C[(1 - \varepsilon)t\lambda|\hat{x}| + 1] \leq \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t,$$

compte tenu de la majoration grossière  $|\hat{x}| \leq 2$ .

Et si

$$\lambda \geq \frac{1}{4C(1 - \varepsilon)} \quad \text{et} \quad t \geq 4CM,$$

alors

$$(1 - \varepsilon)t\lambda\hat{x} \geq M,$$

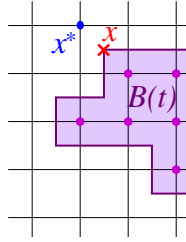
et

$$T(0, (1 - \varepsilon)t\lambda\hat{x}) \leq (1 - \varepsilon)t \underbrace{\lambda\mu(\hat{x})}_{\leq 1} + \underbrace{\eta}_{m\varepsilon} (1 - \varepsilon)t \underbrace{\lambda}_{\leq m^{-1}} \leq (1 - \varepsilon^2)t \leq t,$$

d'après (1.20).

b)  $\frac{1}{(1 + \varepsilon)t}B(t) \subseteq B_0 :$

Soit  $\frac{x}{(1 + \varepsilon)t} \in \frac{1}{(1 + \varepsilon)t}B(t)$ . Alors on a  $T(0, x) \leq t + 2C$ . En effet, il se peut que  $x \in \partial B(t)$  auquel cas, on n'a pas nécessairement  $x^* \in \tilde{B}(t)$ , mais on a tout de même  $x^* \in \tilde{B}(t + 2C)$  (voir figure 1.12).



**FIGURE 1.12** – Exemple de cas où  $x^* \notin \tilde{B}(t)$

Montrons que pour  $\eta$  bien choisi et  $t$  assez grand,

$$\frac{\|x\|}{(1 + \varepsilon)t} \mu(\hat{x}) \leq 1.$$

D'après (1.20), pour  $\|x\| \geq M$  (qui dépend encore pour l'instant de  $\eta$ ) et  $t \geq \frac{4C}{\varepsilon}$ ,

$$\frac{\|x\|}{(1 + \varepsilon)t} \mu(\hat{x}) \leq \frac{1}{(1 + \varepsilon)t} \frac{\mu(\hat{x})}{\mu(\hat{x}) - \eta} T(0, x) \leq \frac{1}{(1 + \varepsilon)t} \frac{1}{1 - \frac{\eta}{m}} (t + 2C) \leq \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}}{(1 + \varepsilon)(1 - \frac{\eta}{m})} \leq 1,$$

pour  $\eta$  fixé, suffisamment petit.

Ainsi, p.s., pour  $t$  assez grand, les inclusions a) et b) sont vérifiées, ce qui permet de conclure pour le  $i$ . du théorème.

6) Passons au deuxième cas, supposons que pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\mu_i = 0$ . Alors d'après (1.19), la fonction  $\mu$  est identiquement nulle.

On se place encore sur l'ensemble de mesure 1 sur lequel (1.14) a lieu. Soit  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  un compact. Il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $K \subseteq B(0, A)$ . Soit  $x \in K$ , montrons que

$$T(0, tx) \leq t,$$

ce qui suffira pour conclure comme dans le cas a) précédent.

Si

$$\|x\| \leq \frac{1}{4C} \quad \text{et} \quad t \geq 2C,$$

on a

$$T(0, tx) \leq C(t\|x\| + 1) \leq Ct2\|x\| + C \leq t.$$

Sinon on choisit  $\eta = \frac{1}{A}$  dans (1.20), et pour

$$\|x\| \geq \frac{1}{4C} \quad \text{et} \quad t \geq 4CM,$$

alors

$$\|tx\| \geq M,$$

et (1.20) implique

$$T(0, tx) \leq \eta\|tx\| \leq \frac{\|x\|}{A} t \leq t.$$

On a ainsi, p.s., quel que soit  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  compact, pour  $t$  assez grand,  $K \subseteq \frac{1}{t}B(t)$ , ce qui achève la preuve de ce théorème.  $\square$

### 1.4.2 Encadrement de $B_0$

D'une certaine manière, dans le cas *ii.* du théorème 1.4.1, la forme asymptotique est  $\mathbb{R}^d$  tout entier. On s'intéressera ici seulement au cas *i.*, c'est-à-dire lorsque pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\mu_i > 0$ .

On sait déjà d'après le théorème que  $B_0$  est convexe compacte d'intérieur non vide et symétrique par rapport aux hyperplans d'équation  $x_i = 0$ .

Elle a été définie au cours de la preuve par

$$B_0 := \{x \mid \mu(x) \leq 1\}.$$

On a donc, pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$B_0 \cap (\mathbb{R}.x) = \left[ -\frac{1}{\mu(\hat{x})}, \frac{1}{\mu(\hat{x})} \right],$$

où

$$\hat{x} := \frac{x}{\|x\|}.$$

Mais comme on a, pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,

$$\mu_i = \mu(\varepsilon_i),$$

il vient, pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,

$$B_0 \cap (\mathbb{R}.\varepsilon_i) = \left[ -\frac{1}{\mu_i}, \frac{1}{\mu_i} \right].$$

De plus, par convexité et symétrie, on obtient un encadrement de  $B_0$ , à savoir

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d |\mu_i x_i| \leq 1 \right\} \subseteq B_0 \subseteq \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sup_{1 \leq i \leq d} |\mu_i x_i| \leq 1 \right\}.$$

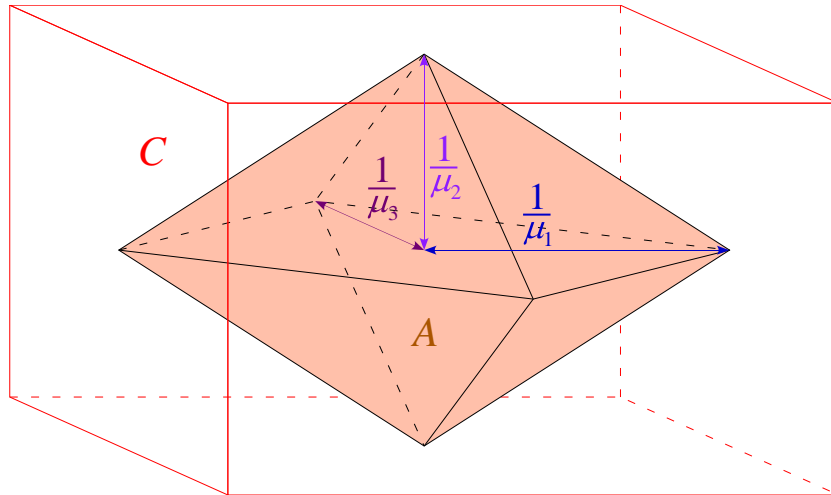


FIGURE 1.13 – Encadrement de  $B_0$ , on a  $A \subseteq B_0 \subseteq C$

C'est-à-dire, si on appelle  $M$  la matrice diagonale

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\mu_d} \end{pmatrix},$$

alors

$$M.B_{|\cdot|} \subseteq B_0 \subseteq M.B_{\|\cdot\|_\infty},$$

où<sup>7</sup>

$$B_{|\cdot|} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq 1\} \quad \text{et} \quad B_{\|\cdot\|_\infty} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_\infty \leq 1\}.$$

Dans le cas où toutes les constantes de temps sont égales, on a alors simplement

$$\frac{1}{\mu} B_{|\cdot|} \subseteq B_0 \subseteq \frac{1}{\mu} B_{\|\cdot\|_\infty}.$$

## 1.5 Continuité de la constante de temps et critère de distinction dans le cas standard

Nous donnons sans démonstrations au cours de cette section quelques résultats concernant le cas standard. Le second chapitre de ce mémoire sera consacré à des résultats similaires pour les coloriage aléatoires.

### 1.5.1 Percolation classique sur $\mathbb{Z}^d$

Rappelons brièvement ici quelques résultats de percolation. Pour plus de détails, voir GRIMMETT [8].

#### Percolation par arêtes

Soit  $p \in [0, 1]$ . On se donne une famille de v.a. i.i.d.  $(\tilde{X}_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$  de Bernoulli de paramètre  $p$ . Une façon de voir les choses consiste à imaginer qu'on "efface" les arêtes de  $\mathbb{E}^d$  indépendamment avec probabilité  $1 - p$  (on ne garde que les 1). Si  $\tilde{X}_e = 1$ , on dit que  $e$  est **ouverte**, si  $\tilde{X}_e = 0$ , on dit que  $e$  est **fermée**.

Une des principales préoccupations de la percolation est de voir si le graphe aléatoire

$$\left( \mathbb{Z}^d, \left\{ e \in \mathbb{E}^d \mid \tilde{X}_e = 1 \right\} \right)$$

aura ou non une (ou plusieurs) composante(s) connexe(s) infinie(s). Le théorème répondant à cette question est le suivant (voir GRIMMETT [8]).

**Théorème 1.5.1** *Il existe  $p_c(\mathbb{Z}^d, \text{arête}) \in (0, 1)$  tel que*

- i. pour tout  $p < p_c(\mathbb{Z}^d, \text{arête})$ , il n'existe p.s. pas de composante connexe infinie,*
- ii. pour tout  $p > p_c(\mathbb{Z}^d, \text{arête})$ , il existe p.s. une unique composante connexe infinie.*

**Remarque.** Ce théorème ne dit pas ce qu'il se passe pour  $p = p_c(\mathbb{Z}^d, \text{arête})$ .

#### Percolation par sites

Soit  $p \in [0, 1]$ . On se donne une famille de v.a. i.i.d.  $(\tilde{X}_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$  de Bernoulli de paramètre  $p$ . Il s'agit maintenant d'effacer les points de  $\mathbb{Z}^d$  indépendamment avec probabilité  $1 - p$ . Si  $\tilde{X}_u = 1$ , on dit que  $u$  est **ouvert**, si  $\tilde{X}_u = 0$ , on dit que  $u$  est **fermé**.

On s'intéresse aux liaisons entre les points de  $\mathbb{Z}^d$  : on dit que  $u$  et  $v$  sont **reliés** s'il existe un chemin  $u \overset{\Gamma}{\longleftrightarrow} v$  qui ne passe que par des sites ouverts. On notera alors  $u \rightsquigarrow v$ .

**Définition 1.5.2** *Pour tout  $u \in \mathbb{Z}^d$ , on définit le **cluster** (de percolation) de  $u$ , par l'ensemble*

$$\mathcal{C}(u) := \{v \in \mathbb{Z}^d \mid u \rightsquigarrow v\}. \tag{1.21}$$

---

7. Si  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ , on note  $\|(x_1, x_2, \dots, x_d)\|_\infty := \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|$  sa norme infinie.

Les clusters sont les composantes connexes du sous-graphe aléatoire de  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$  suivant :

$$\left( \{u \in \mathbb{Z}^d \mid \tilde{X}_u = 1\}, \left\{ \{u, v\} \in \mathbb{E}^d \mid \tilde{X}_u = \tilde{X}_v = 1 \right\} \right).$$

En d'autres termes, cela revient à considérer un coloriage aléatoire de  $\mathbb{Z}^d$  avec  $\mathcal{S} = \{0, 1\}$  et  $p_1 = p$ . Alors  $u \leftrightarrow v$  si et seulement si  $X_u = 1$  et  $T(u, v) = 0$ .

Pour  $u \in \mathbb{Z}^d$ , son cluster de percolation  $\mathcal{C}(u)$  peut être relié à son cluster de coloriage aléatoire  $\mathcal{C}(u)$  par la relation

$$\mathcal{C}(u) = \begin{cases} \mathcal{C}(u) & \text{si } X_u = 1 \\ \emptyset & \text{si } X_u = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Là encore, on regarde les clusters infinis (c.f. GRIMMETT [8]).

**Théorème 1.5.3** *Il existe  $p_c(\mathbb{Z}^d, \text{site}) \in (0, 1)$  tel que*

- i. pour tout  $p < p_c(\mathbb{Z}^d, \text{site})$ , il n'existe p.s. pas de cluster infini,*
- ii. pour tout  $p > p_c(\mathbb{Z}^d, \text{site})$ , il existe p.s. un unique cluster infini.*

**Remarque.** Comme pour le cas de la percolation par arêtes, on ne sait pas ce qu'il se passe pour  $p = p_c(\mathbb{Z}^d, \text{site})$ .

Citons encore un théorème que l'on utilisera par la suite (voir GRIMMETT [8] pour la preuve) :

**Théorème 1.5.4 (Moments du cardinal d'un cluster en régime sous-critique)** *Pour tout  $p < p_c$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a*

$$\mathbb{E}[|\mathcal{C}(0)|^n] < \infty.$$

### 1.5.2 Percolation de premier passage par arêtes

On se place ici dans le cas standard où les  $t(e)$  sont i.i.d. Si les  $t(e)$  suivent la loi  $U$ , notons

$$\mu(U)$$

la constante de temps associée (qui est unique en vertu de la dernière remarque de la section 1.3.3).

J. Theodore COX et Harry KESTEN démontrent dans COX KESTEN [5] (théorème 3) le théorème suivant que nous énonçons sans preuve.

**Théorème 1.5.5** *Soit une suite de lois de probabilité  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend faiblement vers la probabilité  $U$ . Alors*

$$\mu(U_n) \rightarrow \mu(U).$$

*En d'autres termes,  $\mu$  est continue pour la topologie de la convergence faible.*

Harry KESTEN prouve dans KESTEN [11] le théorème suivant, permettant de savoir dans quel cas du théorème de forme asymptotique on est.

**Théorème 1.5.6** *Soit un modèle de percolation de premier passage standard. Alors*

$$\mu > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \mathbb{P}(t(e) = 0) < p_c(\mathbb{Z}^d, \text{arête}).$$

### 1.5.3 Percolation de premier passage par sites

Plutôt que de se donner des temps d'arête, c'est-à-dire considérer que traverser une arête prend un certain temps, on peut aussi envisager le modèle qui consiste à se donner des temps de site, c'est-à-dire considérer que c'est la traversée d'un site qui prend du temps.

Ainsi, on se donne une famille de v.a.  $(t(u))_{u \in \mathbb{Z}^d}$  et on définit le temps de passage du chemin  $\Gamma = (e_1, e_2, \dots, e_l)$  par

$$T(\Gamma) = \sum_{u \in \bigcup_{i=1}^l e_i} t(u),$$

et toujours le temps de voyage de  $u$  à  $v$  par

$$T(u, v) := \inf_{\substack{\Gamma \\ u \rightsquigarrow v}} T(\Gamma).$$

Ce modèle est très utile dans l'étude des coloriations aléatoires car on peut de temps en temps s'y ramener par comparaison comme on le verra au cours du second chapitre. C'est pourquoi on l'introduit brièvement ici.

On retrouve alors les mêmes résultats que ceux énoncés au cours de ce chapitre, à savoir l'existence de la constante de temps, que l'on notera  $\tilde{\mu}$  pour éviter toute ambiguïté, et le théorème de forme asymptotique. De plus, on a l'analogue des théorèmes 1.5.6 et 1.5.5, à savoir :

**Théorème 1.5.7** *Soit une suite de lois de probabilité  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend faiblement vers la probabilité  $U$ . Alors*

$$\tilde{\mu}(U_n) \rightarrow \tilde{\mu}(U).$$

*En d'autres termes,  $\tilde{\mu}$  est continue pour la topologie de la convergence faible.*

**Théorème 1.5.8** *Soit un modèle de percolation de premier passage standard par site. Alors*

$$\tilde{\mu} > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \mathbb{P}(t(u) = 0) < p_c(\mathbb{Z}^d, \text{ site}).$$

# Chapitre 2

## Application aux coloriage aléatoires

Nous commençons ce chapitre en reformulant le théorème de forme asymptotique pour les coloriage aléatoires. Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la continuité de la constante de temps. Dans un second temps, nous donnerons un critère de distinction du cas  $\mu = 0$  du cas  $\mu > 0$ . Et dans un troisième temps, nous étendrons ce résultat au cas où les coloriage ne sont plus nécessairement indépendants.

### 2.1 Rappel des principaux résultats

Dans le cas d'un coloriage aléatoire, on a montré au cours de la section 1.3.3 que la constante de temps  $\mu \in \mathbb{R}_+$  était bien définie. La proposition 1.3.4 permet l'application du théorème 1.4.1 que l'on reformule ici.

**Théorème 2.1.1 (de forme asymptotique)** *Soit un modèle de coloriage aléatoire. Notons  $\mu$  la constante de temps associée.*

*Alors deux cas sont possibles :*

- i. *Soit  $\mu > 0$ , et il existe un convexe compact déterministe d'intérieur non vide  $B_0 \subseteq \mathbb{R}^d$ , symétrique par rapport aux hyperplans d'équation  $x_i = 0$ , tel que, p.s., pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour  $t$  assez grand, on ait*

$$(1 - \varepsilon)B_0 \subseteq \frac{1}{t}B(t) \subseteq (1 + \varepsilon)B_0.$$

- ii. *Soit  $\mu = 0$ , et, p.s., pour tout compact  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ , pour  $t$  assez grand, on a*

$$K \subseteq \frac{1}{t}B(t).$$

**Remarques.**

- i. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$nB_{|\cdot|} \subseteq B(n),$$

donc dans le cas  $\mu > 0$ , on aura  $B_{|\cdot|} \subseteq B_0$ .

- ii. Si l y a un cluster infini d'une certaine couleur, alors au bout d'un certain temps,  $B(t)$  n'est plus borné et on est donc dans le cas où  $\mu = 0$ .

### 2.2 Continuité de $\mu$

#### 2.2.1 Restriction aux chemins "courts"

On s'intéresse maintenant à la dépendance de  $\mu$  en fonction de la loi des  $(X_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$ . On commence tout d'abord par démontrer un lemme.

**Lemme 2.2.1** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $0 \leq k < l$ , définissons les variables<sup>1</sup>

$$T_n(k, l) := \inf \left\{ T(\Gamma); k\varepsilon_1 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} l\varepsilon_1, |\Gamma| \leq n(l-k) \right\}.$$

Alors il existe des constantes  $\mu_1, \mu_2, \dots \in \mathbb{R}_+$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{T_n(0, k)}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{p.s., \mathbb{L}^1} \mu_n.$$

De plus

$$\mu_n \downarrow \mu$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Remarques.**

- i. On se restreint ainsi aux chemins “courts”, dont la taille croît au plus linéairement en fonction de la distance à parcourir.
- ii. Le point important de ce lemme est la convergence de  $\mu_n$  vers  $\mu$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Preuve.** 1) On peut appliquer à la famille de variables aléatoires  $(T_n(k, l))_{0 \leq k < l}$  le théorème sous-additif ergodique en suivant le schéma de la section 1.3.3 pour obtenir l’existence des constantes  $\mu_n \in \mathbb{R}_+$  telles que

$$\frac{T_n(0, k)}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{p.s., \mathbb{L}^1} \mu_n.$$

Le seul point à vérifier qui diffère légèrement est la sous-additivité : pour  $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^*$ ,

$$T_n(0, k+l) \leq T_n(0, k) + T_n(l, k+l).$$

Pour cela, on procède de la même façon que pour l’inégalité triangulaire (proposition 1.1.4) en remarquant simplement que la concaténation d’un chemin de longueur au plus  $nk$  reliant 0 à  $k\varepsilon_1$  avec un autre de longueur au plus  $nl$  reliant  $k\varepsilon_1$  à  $(k+l)\varepsilon_1$  relie bien 0 à  $(k+l)\varepsilon_1$  et est de longueur inférieure à  $n(k+l)$  donc on doit le prendre en compte dans l’infimum qui définit  $T_n(0, k+l)$ .

2) Il est clair que pour  $k \in \mathbb{N}^*$  fixé, la suite  $(T_n(0, k))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante puisque l’on autorise de plus en plus de chemins dans l’infimum. Ainsi, la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est elle-même décroissante.

Il ne reste donc qu’à vérifier que

$$\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \mu_n.$$

L’équation (1.7) montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu_n = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{\mathbb{E}[T_n(0, k)]}{k} \quad \text{et} \quad \mu = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{\mathbb{E}[T(0, k\varepsilon_1)]}{k}.$$

Il s’agit donc de prouver que

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}[T_n(0, k)] = \mathbb{E}[T(0, k\varepsilon_1)], \tag{2.1}$$

car alors

$$\mu = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} \mathbb{E}[T(0, k\varepsilon_1)] = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} \mathbb{E}[T_n(0, k)] = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} \mathbb{E}[T_n(0, k)] = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \mu_n.$$

Or, pour  $n$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$T_n(0, k) \geq T(0, k\varepsilon_1), \tag{2.2}$$

ce qui donne

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}[T_n(0, k)] \geq \mathbb{E}[T(0, k\varepsilon_1)].$$

De plus, compte tenu de (2.2), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_n(0, k)] &\leq \mathbb{E}[T(0, k\varepsilon_1)] + \mathbb{E}[T_n(0, k) \mathbb{1}_{\{T(0, k\varepsilon_1) < T_n(0, k)\}}] \\ &\leq \mathbb{E}[T(0, k\varepsilon_1)] + k \mathbb{P}(T(0, k\varepsilon_1) < T_n(0, k)), \end{aligned}$$

car les temps d’arête sont bornés par 1 et le chemin “direct”  $\Gamma = (\{0, \varepsilon_1\}, \{\varepsilon_1, 2\varepsilon_1\}, \dots, \{(k-1)\varepsilon_1, k\varepsilon_1\})$  relie 0 à  $k\varepsilon_1$  et est de longueur  $k \leq nk$  donc  $T_n(0, k) \leq T(\Gamma) \leq k$ .

Mais comme tout chemin a un temps de parcours entier, compte tenu du fait que les variables  $t(e)$  sont à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , il existe une route (aléatoire)  $\gamma_k$  de 0 à  $k\varepsilon_1$ , c’est-à-dire un chemin dont le temps de parcours réalise l’infimum qui définit  $T(0, k\varepsilon_1)$ , c’est-à-dire que

$$T(0, k\varepsilon_1) = T(\gamma_k).$$

---

1. Pour tout ensemble  $A$ , on note  $|A|$  son cardinal.

Par suite, pour  $n$  assez grand,  $|\gamma_k| \leq nk$  et  $T_n(0, k) = T(0, k\varepsilon_1)$ , et p.s.

$$T_n(0, k) \downarrow T(0, k\varepsilon_1),$$

quand  $n \rightarrow \infty$ .

Ainsi, par convergence monotone,

$$\mathbb{P}(T(0, k\varepsilon_1) < T_n(0, k)) \downarrow 0,$$

quand  $n \rightarrow \infty$ .

Et enfin,

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}[T_n(0, k)] \leq \mathbb{E}[T(0, k\varepsilon_1)] + k \mathbb{P}(T(0, k\varepsilon_1) < T_m(0, k)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[T(0, k\varepsilon_1)],$$

d'où (2.1). □

## 2.2.2 Continuité des $\mu_n$

On introduit à présent quelques notations. Soient

$$s = |\mathcal{S}| \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \{s_i, i \in \llbracket 1, s \rrbracket\},$$

avec la convention que  $\llbracket 1, s \rrbracket = \mathbb{N}^*$  si  $s = \infty$ .

On note encore

$$P(\mathcal{S}) := \left\{ (p_1, p_2, \dots, p_s) \in [0, 1]^{\mathcal{S}} \mid \sum_{i=1}^s p_i = 1 \right\},$$

de sorte que  $P(\mathcal{S})$  s'identifie canoniquement à l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\mathcal{S}$ .

On munit  $P(\mathcal{S})$  de la distance de la norme infinie, c'est-à-dire que si  $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  et  $q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$  sont dans  $P(\mathcal{S})$ , on pose

$$|p - q| := \sup_{i \in \llbracket 1, s \rrbracket} |p_i - q_i|.$$

Si  $p = (p_1, p_2, \dots, p_s) \in P(\mathcal{S})$ , et si  $X_u$  suit la loi

$$\sum_{i=1}^s p_i \delta_{s_i},$$

on notera  $\mu(p)$  la constante de temps associée, et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mu_n(p)$  les constantes introduites dans l'énoncé du lemme 2.2.1.

**Proposition 2.2.2** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application*

$$\begin{aligned} P(\mathcal{S}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ p &\mapsto \mu_n(p) \end{aligned}$$

*est continue.*

**Preuve.** 1) L'idée est de procéder par couplage. On se donne une famille de v.a.  $(U_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$  i.i.d. uniformes sur  $[0, 1]$  et, pour  $p = (p_1, p_2, \dots, p_s) \in P(\mathcal{S})$ , on définit pour tout  $u \in \mathbb{Z}^d$

$$X_u^{(p)} = \sum_{i=1}^s s_i \mathbb{1}_{\{p_0 + \dots + p_{i-1} \leq U_u < p_1 + \dots + p_i\}},$$

avec la convention que  $p_0 = 0$ .

Ainsi,

$$\left( X_u^{(p)} \right)_{u \in \mathbb{Z}^d} \stackrel{(loi)}{=} \left( \sum_{i=1}^s p_i \delta_{s_i} \right)^{\otimes \mathbb{Z}^d}.$$

2) Fixons  $p = (p_1, p_2, \dots, p_s) \in P(\mathcal{S})$ . On va montrer la continuité en ce point.

Fixons  $\delta > 0$ . On va commencer par montrer que si  $q \in P(\mathcal{S})$  est suffisamment proche de  $p$ , alors pour tout  $u \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$\mathbb{P}(X_u^{(p)} \neq X_u^{(q)}) \leq \delta.$$

Pour cela, commençons par fixer  $S \in \llbracket 1, s \rrbracket$  tel que, si  $s < \infty$ ,  $S = s$ , et si  $s = \infty$ ,

$$\sum_{i=S+1}^s p_i < \frac{\delta}{2}.$$

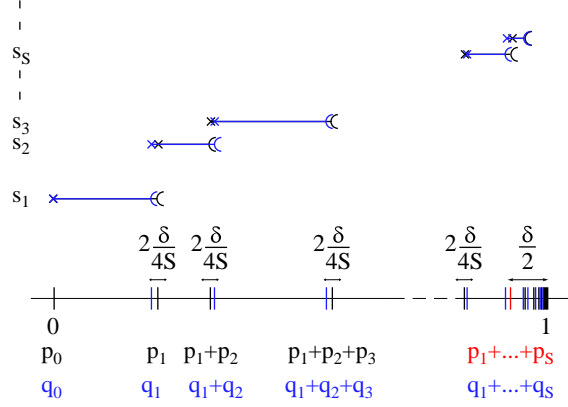
Alors si

$$|q - p| \leq \frac{\delta}{4S},$$

on a

$$\mathbb{P}\left(X_u^{(p)} \neq X_u^{(q)}\right) \leq S \left(2 \frac{\delta}{4S}\right) + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

On a majoré par la probabilité que  $U_u$  tombe autour des  $S$  premiers points  $p_1 + \dots + p_i$  à moins de  $\frac{\delta}{4S}$  ou après le point  $p_1 + \dots + p_S$  (voir figure 2.1).



**FIGURE 2.1** – Représentation des lois de  $X_u^{(p)}$  et  $X_u^{(q)}$

3) Fixons  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$ . Soit encore  $p' \in P(\mathcal{S})$  tel que

$$\mathbb{P}(X_u^{(p)} \neq X_u^{(p')}) \leq \delta.$$

Pour  $n$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ , notons  $T_n(0, k)$  et  $T'_n(0, k)$  les variables définies au cours de l'énoncé du lemme 2.2.1 associées respectivement aux configurations

$$X := \left(X_u^{(p)}\right)_{u \in \mathbb{Z}^d} \quad \text{et} \quad X' := \left(X_u^{(p')}\right)_{u \in \mathbb{Z}^d}.$$

Si on appelle  $\gamma_n^k$  un chemin tel que

$$T_n(0, k) = T(\gamma_n^k),$$

alors  $\gamma_n^k$  est mesurable par rapport à  $\sigma(X)$  et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T'_n(0, k) \geq T_n(0, k) + \varepsilon k \mid X) &\leq \mathbb{P}\left(X' \text{ diffère de } X \text{ en au moins } \left\lfloor \frac{\varepsilon k}{2} \right\rfloor \text{ points de } \gamma_n^k \mid X\right) \\ &\leq C_{|\gamma_n^k|}^{\lfloor \varepsilon k / 2 \rfloor} \delta^{\lfloor \varepsilon k / 2 \rfloor} \\ &\leq 2^{|\gamma_n^k|} \delta^{\frac{\varepsilon k}{2} - 1} \\ &\leq \frac{1}{\delta} \left(2^n \delta^{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^k. \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $n$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}(T'_n(0, k) \geq T_n(0, k) + \varepsilon k) \leq \frac{1}{\delta} \left(2^n \delta^{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^k.$$

Donc si  $\delta < 2^{-\frac{2n}{\varepsilon}}$ , le lemme de Borel-Cantelli implique que, p.s. pour  $k$  assez grand,

$$T'_n(0, k) < T_n(0, k) + \varepsilon k.$$

En appliquant le même raisonnement en changeant les rôles de  $p$  et  $p'$ , on trouve que, p.s. pour  $k$  assez grand,

$$|T'_n(0, k) - T_n(0, k)| \leq \varepsilon k,$$

et donc

$$|\mu_n(p) - \mu_n(p')| \leq \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

**Corollaire.** L'application

$$\begin{aligned} P(\mathcal{S}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ p &\mapsto \mu(p) \end{aligned}$$

est semi-continue supérieurement.

**Preuve.** Ceci découle immédiatement du lemme 2.2.1 et de la proposition 2.2.2 car l'application  $\mu$  est un infimum de fonctions continues.  $\square$

### 2.2.3 Continuité de $\mu$

Passons maintenant au résultat principal de cette section. Commençons par rappeler un résultat classique sur le nombre de chemins auto-évitant qui partent de l'origine. Si on appelle  $a_n$  le nombre de chemins auto-évitant issus de 0 de longueur  $n$ , alors en coupant un chemin de longueur  $m + n$  en un chemin de longueur  $m$  et un autre de longueur  $n$ , on obtient que

$$a_{m+n} \leq a_m a_n,$$

et donc en appliquant le lemme sous-additif on obtient l'existence d'une constante  $\lambda > 0$  telle que

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n^{1/n}.$$

Cette constante est appelée **constante de connectivité** du réseau.

#### Remarques.

- i. On peut minorer simplement  $a_n$  par le nombre de chemins de longueur  $n$  issus de 0 qui ne vont que dans une direction donnée (par exemple vers la droite et vers le haut en dimension 2), ces chemins étant nécessairement auto-évitants, donc

$$d^n \leq a_n.$$

On peut majorer  $a_n$  par le nombre de chemins de longueur  $n$  issus de 0 qui ne "reviennent jamais sur leur pas", c'est-à-dire qui n'ont pas deux arêtes consécutives égales, d'où

$$a_n \leq 2d(2d-1)^{n-1},$$

et donc

$$d \leq \lambda \leq 2d-1.$$

- ii. Il existe des encadrements plus fins de la constante  $\lambda$ , mais sa valeur exacte n'est connue que dans le cas trivial de la dimension 1 où  $\lambda = 1$ .

#### Théorème 2.2.3 L'application

$$\begin{aligned} \{p \in P(\mathcal{S}) \mid |p| < \frac{1}{\lambda}\} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ p &\mapsto \mu(p) \end{aligned}$$

est continue.

**Preuve.** 1) Commençons par traiter le cas  $s < \infty$ . Soit  $0 < \alpha < \frac{1}{\lambda}$ . On va montrer un résultat plus fort, que pour  $n$  assez grand, quel que soit  $p$  tel que  $|p| \leq \alpha$ ,  $\mu_n = \mu$ , c'est-à-dire que la suite d'applications  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est uniformément stationnaire sur  $\{p \in P(\mathcal{S}) \mid |p| < \alpha\}$ . Ceci entraînera la continuité de  $\mu$  sur  $\{p \in P(\mathcal{S}) \mid |p| < \frac{1}{\lambda}\}$  grâce à la proposition 2.2.2.

Soit

$$\Gamma = (e_1, e_2, \dots, e_l)$$

un chemin de longueur  $l \in \mathbb{N}^*$ , et  $k$  un entier. Notons  $u_0, u_1, \dots, u_l$  les points par lesquels passe  $\Gamma$ , c'est-à-dire que, pour  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ ,  $u_i := e_i \cap e_{i+1}$ , et  $u_0$  est tel que  $e_1 = \{u_0, u_1\}$  (voir figure 2.2).

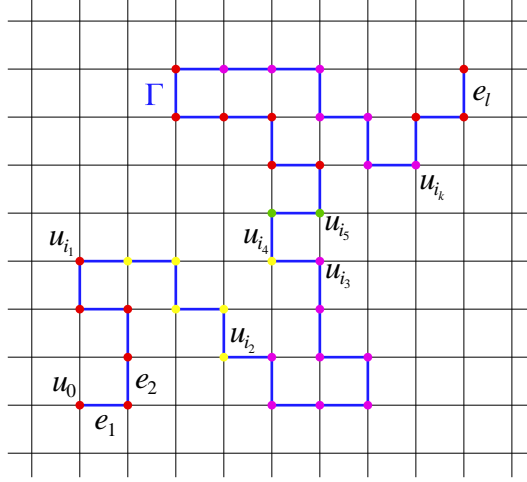
On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T(\Gamma) \leq k) &\leq \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < l} \mathbb{P}(X_{u_0} = X_{u_1} = \dots = X_{u_{i_1}}) \mathbb{P}(X_{u_{i_1+1}} = \dots = X_{u_{i_2}}) \dots \mathbb{P}(X_{u_{i_{k-1}+1}} = \dots = X_{u_l}) \\ &\leq \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < l} \sum_{j=1}^s p_j^{i_1+1} \sum_{j=1}^s p_j^{i_2-i_1} \dots \sum_{j=1}^s p_j^{l-i_k} \\ &\leq \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < l} s|p|^{i_1+1} s|p|^{i_2-i_1} \dots s|p|^{l-i_k} \\ &\leq \binom{l}{k} s^{k+1} |p|^{l+1}. \end{aligned}$$

La première inégalité est obtenue en majorant  $\mathbb{P}(T(\Gamma) \leq k)$  par la probabilité qu'il existe  $k$  indices  $i_1, i_2, \dots, i_k$  tels que

$$\begin{aligned} X_{u_0} &= X_{u_1} = \dots = X_{u_{i_1}}, \\ X_{u_{i_1+1}} &= X_{u_{i_1+2}} = \dots = X_{u_{i_2}}, \\ &\dots \\ X_{u_{i_k+1}} &= X_{u_{i_k+2}} = \dots = X_{u_l}, \end{aligned}$$

(c.f. figure 2.2).



**FIGURE 2.2** – Majoration de  $\mathbb{P}(T(\Gamma) \leq k)$

Appelons

$$N_k := \inf \left\{ |\Gamma| \mid 0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} k\varepsilon_1, T(\Gamma) = T(0, k\varepsilon_1) \right\} \quad (2.3)$$

la longueur minimale d'une route de 0 à  $k\varepsilon_1$ .

On avait obtenu au cours de la démonstration du lemme 2.2.1

$$\mathbb{E}[T_n(0, k)] \leq \mathbb{E}[T(0, k\varepsilon_1)] + k\mathbb{P}(T(0, k\varepsilon_1) < T_n(0, k)),$$

ce que l'on peut réécrire

$$\mathbb{E} \left[ \frac{T_n(0, k)}{k} \right] \leq \mathbb{E} \left[ \frac{T(0, k\varepsilon_1)}{k} \right] + \mathbb{P}(N_k > nk). \quad (2.4)$$

Montrons que pour  $n$  assez grand,  $\mathbb{P}(N_k > nk)$  tend uniformément vers 0 sur l'ensemble des  $p$  tels que  $|p| \leq \alpha$ .

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_k > nk) &\leq \mathbb{P}(\text{il existe un chemin auto-évitant } \Gamma \text{ de longueur } nk \text{ tel que } T(\Gamma) \leq k) \\ &\leq \sum_{\substack{\Gamma \\ 0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \cdot, |\Gamma|=nk}} \mathbb{P}(T(\Gamma) \leq k) \\ &\leq a_{nk} \binom{nk}{k} s^{k+1} |p|^{nk+1} \end{aligned}$$

La première inégalité provient du fait que si  $N_k > nk$ , il existe un chemin auto-évitant de 0 à  $k\varepsilon_1$  de longueur supérieure à  $nk$  dont le temps de parcours est  $T(0, k\varepsilon_1) \leq k$ . A fortiori, il existe un chemin auto-évitant de longueur  $nk$  issu de 0 dont le temps de parcours est inférieur à  $k$  (c.f. figure 2.3).

La notation  $0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \cdot$  signifie que  $\Gamma$  est un chemin auto-évitant issu de 0.

Et comme

$$\lambda < \frac{1}{\alpha},$$

il existe  $\gamma < 1$  tel que pour  $n$  assez grand ( $k \geq 1$ ),

$$a_{nk} \leq \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^{nk}.$$

Dans ce cas, pour  $|p| \leq \alpha$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_k > nk) &\leq \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^{nk} \frac{(nk)^k}{k!} s^{k+1} \alpha^{nk} \\ &\leq s \frac{(snk\gamma^n)^k}{k!}. \end{aligned}$$

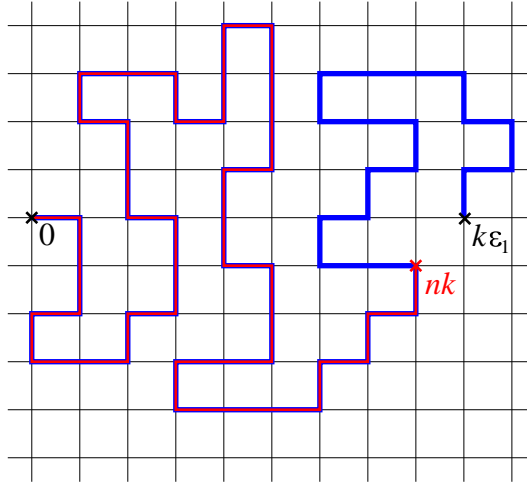


FIGURE 2.3 – Majoration de  $\mathbb{P}(N_k > nk)$

Or, la formule de Stirling implique que

$$k! \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k,$$

donc

$$\frac{(snk\gamma^n)^k}{k!} \sim \frac{(sne\gamma^n)^k}{\sqrt{2\pi k}}.$$

Ainsi, pour  $n$  assez grand tel que

$$(sne\gamma^n) < 1,$$

on obtient que  $\mathbb{P}(N_k > nk)$  tend uniformément vers 0 sur l'ensemble  $\{p \in P(\mathcal{S}) \mid |p| < \alpha\}$ .

On a alors, en passant à la limite  $k \rightarrow \infty$  dans (2.4), pour  $n$  assez grand, quel que soit  $p \in P(\mathcal{S})$  tel que  $|p| < \alpha$ ,

$$\mu_n(p) \leq \mu(p),$$

d'où l'égalité.

2) Traitons maintenant le cas où  $s = \infty$ . Soit  $\tilde{p} \in P(\mathcal{S})$  tel que  $|\tilde{p}| < \frac{1}{\lambda}$ . On va montrer de façon analogue au 1) que  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est uniformément stationnaire au voisinage de  $\tilde{p}$ .

Soit  $|\tilde{p}| < \alpha < \frac{1}{\lambda}$ . Il existe  $S \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sum_{i>S} \tilde{p}_i \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Alors si

$$|p - \tilde{p}| < \frac{\alpha}{2S},$$

il vient

$$\sum_{i \leq S} p_i \geq \sum_{i \leq S} \tilde{p}_i - S \frac{\alpha}{2S} \geq 1 - \alpha,$$

donc

$$\sum_{i < S} p_i \leq \alpha.$$

Ainsi, sur le voisinage de  $\tilde{p}$

$$V := \left\{ p \in P(\mathcal{S}) \mid |p| \leq \alpha, |p - \tilde{p}| < \frac{\alpha}{2S} \right\},$$

pour  $r \in \mathbb{N}^*$ , par convexité de  $x \mapsto x^r$ , il vient

$$\sum_{i=1}^s p_i^r \leq S\alpha^r + \sum_{i>S} p_i^r \leq S\alpha^r + \left( \sum_{i>S} p_i \right) \left( \sum_{i>S} p_i \right)^{r-1} \leq (S+1)\alpha^r.$$

Le reste de la preuve est le même en remplaçant  $s$  par  $S+1$  et en restant sur le voisinage  $V$ .  $\square$

**Remarque.** On a simplement majoré la probabilité que  $N_k$  soit grand par la probabilité qu'il existe un long chemin de faible temps de parcours. On n'a à aucun moment pris en compte le fait que c'est la longueur d'une route *minimale*. Cet argument ne pourra donc pas fonctionner si un des  $p_i$  est grand, car alors, il va y avoir de grands clusters de la  $i$ -ème couleur et donc des long chemins de faible temps de parcours.

Par exemple, si  $p_i$  dépasse le seuil critique de percolation de  $\mathbb{Z}^d$  par site, il va y avoir un cluster infini de couleur  $i$  et dans ce cas, on pourra avoir des chemins arbitrairement grands de très faible temps de parcours.

La preuve du théorème 2.2.3 suggère un résultat intéressant que nous reformulons ici.

**Proposition 2.2.4** *Soit  $N_k$  la longueur d'une route minimale<sup>2</sup> de 0 à  $k\varepsilon_1$ . Alors la quantité*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k}{k}$$

*est uniformément bornée au voisinage de tout point  $p \in P(\mathcal{S})$  tel que  $|p| < \frac{1}{\lambda}$ .*

**Preuve.** Soit  $p \in P(\mathcal{S})$  tel que  $|p| < \frac{1}{\lambda}$ . La majoration que l'on a obtenue pour  $\mathbb{P}(N_k > nk)$  dans l'un des deux cas de la preuve du théorème 2.2.3 prouve qu'il existe un  $n \in \mathbb{N}$  et un voisinage de  $p$  sur lequel la série des  $(\mathbb{P}(N_k > nk))_{k \geq 1}$  converge, donc en appliquant le lemme de Borel-Cantelli, on obtient que, sur ce voisinage, p.s., pour  $k$  assez grand,

$$N_k \leq nk.$$

Ceci implique bien que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k}{k}$$

est uniformément borné au voisinage de  $p$ . □

## 2.3 Critère de distinction entre les cas $\mu = 0$ et $\mu > 0$

### 2.3.1 Résultats préliminaires

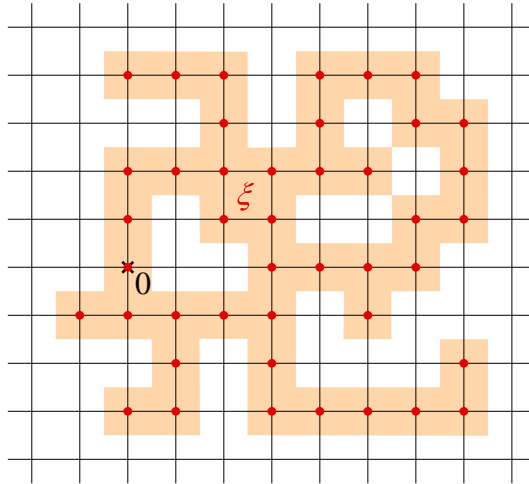
Pour alléger les notations, notons à partir de maintenant simplement  $p_c$  pour  $p_c(\mathbb{Z}^d, \text{site})$ . Nous allons voir au cours de cette section quelques résultats préliminaires en vue d'établir le théorème 2.3.6 à la section suivante.

Commençons par énoncer sans démonstration (voir COX GANDOLFI GRIFFIN KESTEN [4] pour la preuve de ce théorème) un théorème dû à J. Theodore COX, Alberto GANDOLFI, Philip S. GRIFFIN, et Harry KESTEN.

**Définition 2.3.1** *On appelle **animal** un sous-ensemble fini  $\xi$  de  $\mathbb{Z}^d$  contenant l'origine 0 et tel que le graphe*

$$(\xi, \{\{u, v\} \in \mathbb{E}^d \mid u, v \in \xi\})$$

*soit connexe.*



**FIGURE 2.4** – *Exemple d'animal (l'animal est en rouge, le fond orange ne sert qu'à le faire ressortir)*

Pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$ , notons  $\Xi(l)$  l'ensemble des animaux de taille  $l$ ,

$$\Xi(l) := \{\xi \text{ animal} \mid |\xi| = l\}. \tag{2.5}$$

---

2. définie au cours de la preuve du théorème 2.2.3 par l'équation (2.3).

Notons encore  $\Xi$  l'ensemble de tous les animaux,

$$\Xi := \bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} \Xi(l).$$

On se donne une famille  $(Z_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$  de v.a. i.i.d. positives, et on s'intéresse aux animaux "gourmands" qui, pour une taille fixée, maximisent la quantité

$$\sum_{u \in \xi} Z_u,$$

c'est-à-dire qu'on regarde les animaux qui, pour une taille donnée, mangent le plus, si on considère les variables  $Z_u$  comme une quantité de nourriture.

Donnons une version simplifiée du théorème :

**Théorème 2.3.2 (de COX GANDOLFI GRIFFIN KESTEN)** *Soit  $(Z_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$  une famille de v.a. positives i.i.d. telle qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$\mathbb{E} [Z_u^{d+\varepsilon}] < \infty.$$

*Alors, p.s.,*

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \sum_{u \in \xi} Z_u < \infty.$$

**Remarque.** Dans COX GANDOLFI GRIFFIN KESTEN [4], les hypothèses sont allégées, mais cette version sera suffisante pour ce mémoire.

Nous allons, à l'aide de ce théorème, démontrer un théorème similaire pour les clusters de la percolation. Commençons tout d'abord par deux lemmes de théorie des graphes.

**Lemme 2.3.3** *Soit, pour tout  $w \in \mathbb{Z}^d$ , un sous-ensemble  $\xi(w)$  de  $\mathbb{Z}^d$  vide, ou alors contenant  $w$  et tel que le graphe*

$$(\xi(w), \{\{u, v\} \in \mathbb{E}^d \mid u, v \in \xi(w)\})$$

*soit connexe ( $\xi(w)$  n'est a priori pas supposé fini).*

*Soit encore une application  $z : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$  telle que pour tout  $u \in \mathbb{Z}^d$ ,  $z(u)$  est tel que*

$$z(u) = u \quad \text{ou} \quad u \in \xi(z(u)).$$

*Alors, pour tout  $\xi \in \Xi$ , il existe  $\xi' \in \Xi$  tel que  $\xi \subseteq \xi'$  et*

$$\frac{1}{|\xi|} \sum_{u \in \xi} |\xi(z(u))| \leq \frac{2}{|\xi'|} \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')|^2.$$

**Preuve.** S'il existe  $u_0 \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $|\xi(u_0)| = \infty$ , alors il suffit de prendre

$$\xi' := \xi \cup \{u_0\}.$$

Sinon, pour tout  $u \in \mathbb{Z}^d$ ,  $|\xi(u)| < \infty$ , c'est-à-dire

$$\xi(u) \in (u + \Xi) \cup \{\emptyset\}.$$

Posons

$$A := \frac{1}{|\xi|} \sum_{u \in \xi} |\xi(z(u))|.$$

C'est la taille moyenne des  $\xi(z(u))$  pour  $u \in \xi$ . On va alors grossir  $\xi$  en lui rajoutant les points  $z(u)$  pour lesquels  $|\xi(z(u))|$  est grand : soit

$$\tilde{\xi} := \left\{ u \in \xi \mid |\xi(z(u))| \geq \frac{A}{2} \right\},$$

et

$$\xi' := \xi \cup \left( \bigcup_{u \in \tilde{\xi}} \xi(z(u)) \right).$$

Si  $u \in \tilde{\xi}$  et  $\xi(z(u)) \neq \emptyset$  (ce qui arrive nécessairement si  $A \neq 0$ ), alors  $u \in \xi(z(u))$ , donc

$$\xi \cap \xi(z(u)) \neq \emptyset,$$

et comme  $\xi \in \Xi$  et  $|\tilde{\xi}| < \infty$ ,

$$\xi' \in \Xi.$$

Pour  $v \in \xi' \setminus \xi$ , il existe  $u \in \tilde{\xi}$  tel que  $v \in \xi(z(u))$ . Posons  $z'(v) := z(u)$ . Ainsi  $z'(v) \in \xi(z(u)) \subseteq \xi'$  et

$$\xi(z'(v)) \geq \frac{A}{2}.$$

Pour  $v \in \tilde{\xi}$ , posons simplement  $z'(v) = z(v) \in \xi'$ .

Dans tous les cas,

$$v \in \xi(z'(v)),$$

et donc, pour  $u' \in \xi'$ ,

$$\{v \in (\xi' \setminus \xi) \cup \tilde{\xi}, z'(v) = u'\} \subseteq \xi(u').$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')|^2 &\geq \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')| \left| \{v \in (\xi' \setminus \xi) \cup \tilde{\xi}, z'(v) = u'\} \right| \\ &= \sum_{u' \in \xi'} \sum_{v \in (\xi' \setminus \xi) \cup \tilde{\xi}, z'(v) = u'} |\xi(z'(v))| \\ &= \sum_{v \in (\xi' \setminus \xi) \cup \tilde{\xi}} |\xi(z'(v))| \\ &= \sum_{v \in (\xi' \setminus \xi)} |\xi(z'(v))| + \sum_{v \in \xi'} |\xi(z(v))| \\ &= \sum_{v \in (\xi' \setminus \xi)} \underbrace{|\xi(z'(v))|}_{\geq \frac{A}{2}} + \underbrace{\sum_{v \in \xi'} |\xi(z(v))|}_{=A|\xi|} - \sum_{v \in (\xi \setminus \tilde{\xi})} \underbrace{|\xi(z(v))|}_{\leq \frac{A}{2}} \\ &\geq \frac{A}{2} \left( (|\xi'| - |\xi|) + 2|\xi| - (|\xi| - |\tilde{\xi}|) \right) \\ &\geq \frac{A}{2} |\xi'|, \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité voulue.  $\square$

**Lemme 2.3.4** *Soit, pour tout  $w \in \mathbb{Z}^d$ , un sous-ensemble  $\xi(w)$  de  $\mathbb{Z}^d$  vide, ou alors contenant  $w$  et tel que le graphe*

$$(\xi(w), \{\{u, v\} \in \mathbb{E}^d \mid u, v \in \xi(w)\})$$

*soit connexe.*

*Si pour  $u \in \mathbb{Z}^d$ , on définit, avec la convention  $\sup \emptyset = 0$ ,*

$$\mathcal{U}(u) := \sup \{|\xi(v)| \mid v \in \mathbb{Z}^d, u \in \xi(v)\},$$

*alors, pour tout  $\xi \in \Xi$ , on a*

$$\frac{1}{|\xi|} \sum_{u \in \xi} \mathcal{U}(u) \leq 2 \sup_{\xi' \in \Xi, \xi \subseteq \xi'} \frac{1}{|\xi'|} \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')|^2. \quad (2.6)$$

**Preuve.** Si le terme de gauche de (2.6) est infini, cela signifie qu'il existe  $u_0 \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\mathcal{U}(u_0) = \infty$  vu que la somme est finie. Dans ce cas

$$\sup_{v \in \mathbb{Z}^d} |\xi(v)| = \infty,$$

et le membre de droite de (2.6) est aussi infini, comme on peut le voir par exemple en se restreignant aux animaux  $\xi \cup \{v\}$ ,  $v$  parcourant  $\mathbb{Z}^d$ .

Sinon, pour tout  $u$ , le supremum définissant  $\mathcal{U}(u)$  est atteint, il existe donc  $z(u) \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $u \in \xi(z(u))$  et

$$\mathcal{U}(u) = |\xi(z(u))|.$$

On définit ainsi une application  $z$  qui vérifie les hypothèses de lemme 2.3.3. On a donc

$$\frac{1}{|\xi|} \sum_{u \in \xi} |\xi(z(u))| \leq 2 \sup_{\xi' \in \Xi, \xi \subseteq \xi'} \frac{1}{|\xi'|} \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')|^2,$$

ce qui est l'inégalité voulue.  $\square$

Passons maintenant au théorème principal de cette section.

**Théorème 2.3.5** *Considérons sur  $\mathbb{Z}^d$  un modèle de percolation par site de paramètre  $p < p_c$ . Pour tout  $u \in \mathbb{Z}^d$ , notons  $\mathcal{C}(u)$  le cluster (de percolation<sup>3</sup>) du point  $u$ .*

*Alors, p. s.,*

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \sum_{u \in \xi} |\mathcal{C}(u)| < \infty.$$

**Preuve.** On ne peut pas appliquer directement le théorème 2.3.2 car les v.a.  $|\mathcal{C}(u)|$ ,  $u \in \mathbb{Z}^d$  ne sont bien sûr pas indépendantes. Nous allons les majorer stochastiquement<sup>4</sup>.

1) On considère une famille  $(\tilde{\mathcal{C}}(u))$  de v.a. i.i.d. de même loi que  $\mathcal{C}(0)$ . Posons, pour tout  $u$ ,

$$\xi(u) = u + \tilde{\mathcal{C}}(u),$$

de sorte que  $\xi(u) \stackrel{(loi)}{=} \mathcal{C}(u)$ .

On va construire algorithmiquement les clusters de percolation. On commence par ordonner de façon déterministe  $\mathbb{Z}^d$ ,

$$\mathbb{Z}^d = \{u_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

On prend  $\hat{\mathcal{C}}(u_1) := \xi(u_1)$  et on procède par récurrence. Si on a déjà  $\hat{\mathcal{C}}(u_1), \hat{\mathcal{C}}(u_2), \dots, \hat{\mathcal{C}}(u_n)$ , on prend  $\hat{\mathcal{C}}(u_{n+1})$  comme suit :

- s'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $u_{n+1} \in \hat{\mathcal{C}}(u_i)$ , on définit

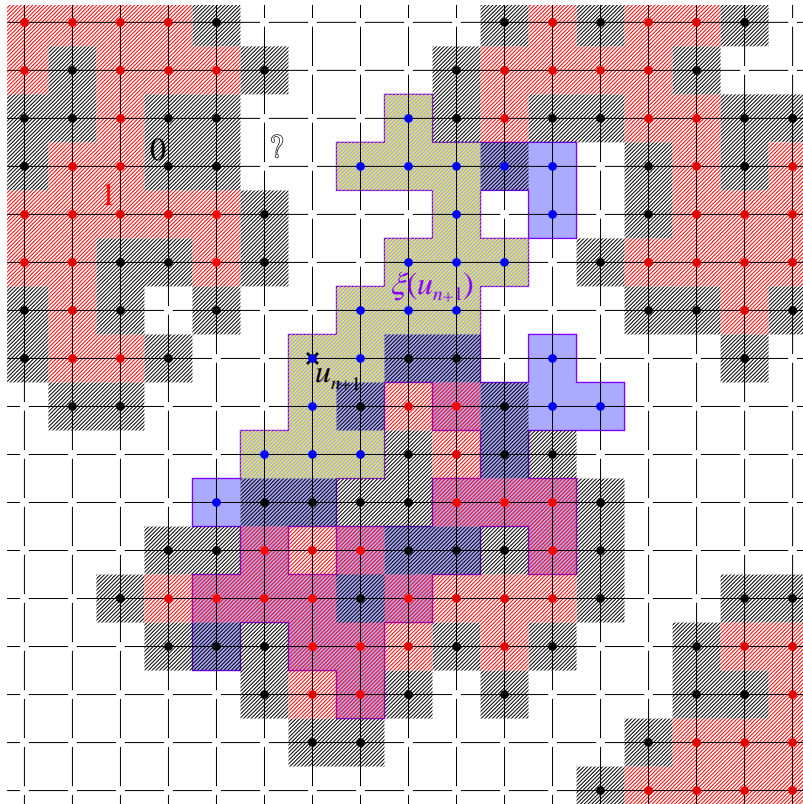
$$\hat{\mathcal{C}}(u_{n+1}) := \hat{\mathcal{C}}(u_i),$$

- si  $u_{n+1} \in \partial \hat{\mathcal{B}}_n$  (voir figure 1.6 pour la définition de la frontière), avec  $\hat{\mathcal{B}}_n := \left( \bigcup_{i=1}^n \hat{\mathcal{C}}(u_i) \right)$ , on définit

$$\hat{\mathcal{C}}(u_{n+1}) := \emptyset,$$

- sinon, en appelant  $\bar{\mathcal{B}}_n := \hat{\mathcal{B}}_n \cup \partial \hat{\mathcal{B}}_n$ , on prend pour  $\hat{\mathcal{C}}(u_{n+1})$  le cluster de  $u_{n+1}$  dans

$$\xi(u_{n+1}) \setminus \bar{\mathcal{B}}_n.$$



**FIGURE 2.5** – Définition de  $\hat{\mathcal{C}}(u_{n+1})$  (en jaune)

3. Voir (1.21) ou (1.22).

4. Voir GEORGII HÄGGSTRÖM MAES [7] pour des rappels sur les dominations stochastiques.

Ceci définit bien les clusters d'un modèle de percolation par site sur  $\mathbb{Z}^d$  : on vérifie par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left(\hat{\mathcal{C}}(u_1), \hat{\mathcal{C}}(u_2), \dots, \hat{\mathcal{C}}(u_n)\right) \stackrel{(loi)}{=} \left(\mathcal{C}(u_1), \mathcal{C}(u_2), \dots, \mathcal{C}(u_n)\right).$$

En effet,

$$\hat{\mathcal{C}}(u_1) \stackrel{(loi)}{=} \mathcal{C}(u_1),$$

et, conditionnellement à  $(\mathcal{C}(u_1), \mathcal{C}(u_2), \dots, \mathcal{C}(u_n))$ , trois cas sont possibles :

– s'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $u_{n+1} \in \mathcal{C}(u_i)$ , c'est-à-dire  $u_i \rightsquigarrow u_{n+1}$ , on a

$$\mathcal{C}(u_{n+1}) = \mathcal{C}(u_i),$$

– si  $u_{n+1} \in \partial \mathcal{B}_n$ , avec  $\mathcal{B}_n := \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}(u_i)\right)$ , alors  $u_{n+1}$  ne peut pas être ouvert car sinon il serait relié à un point de  $\mathcal{B}_n$  donc à un  $\mathcal{C}(u_i)$  pour un certain  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a donc

$$\mathcal{C}(u_{n+1}) := \emptyset,$$

– enfin, si  $u_{n+1} \notin \bar{\mathcal{B}}_n := \mathcal{B}_n \cup \partial \mathcal{B}_n$ , la loi de  $\mathcal{C}(u_{n+1})$  est celle du cluster de percolation de  $u_{n+1}$  sur  $\mathbb{Z}^d \setminus \bar{\mathcal{B}}_n$ , donc  $\mathcal{C}(u_{n+1})$  a la loi du cluster de  $u_{n+1}$  de

$$\xi(u_{n+1}) \setminus \bar{\mathcal{B}}_n.$$

On obtient ainsi que la famille  $(\hat{\mathcal{C}}(u))_{u \in \mathbb{Z}^d}$  a bien la loi des clusters d'une percolation par site sur  $\mathbb{Z}^d$ .

2) On va pouvoir maintenant majorer stochastiquement leur cardinal. Grâce à cette construction, on a que pour tout  $u \in \mathbb{Z}^d$ , il existe  $v \in \mathbb{Z}^d$  tel que

$$\hat{\mathcal{C}}(u) \subseteq \xi(v) \quad \text{et} \quad u \in \xi(v).$$

Donc, pour tout  $u \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$|\hat{\mathcal{C}}(u)| \leq \sup \left\{ |\xi(v)| \mid v \in \mathbb{Z}^d, u \in \xi(v) \right\}.$$

En appelant

$$\mathcal{U}(u) := \sup \left\{ |\xi(v)| \mid v \in \mathbb{Z}^d, u \in \xi(v) \right\},$$

on vient de montrer la majoration stochastique

$$\left(|\mathcal{C}(u)|\right)_{u \in \mathbb{Z}^d} \preceq \left(\mathcal{U}(u)\right)_{u \in \mathbb{Z}^d}. \quad (2.7)$$

3) Les  $\xi(u)$  vérifient pour tout  $\omega$  les hypothèses du lemme 2.3.4 (en fait, comme  $p < p_c$ , on a même que p.s.  $\xi(u) \in (u + \Xi) \cup \{\emptyset\}$ ). L'équation (2.6) montre que, pour tout  $\xi \in \Xi$ , on a p.s.

$$\frac{1}{|\xi|} \sum_{u \in \xi} \mathcal{U}(u) \leq 2 \sup_{\xi' \in \Xi, \xi \subseteq \xi'} \frac{1}{|\xi'|} \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')|^2.$$

Compte tenu de la domination stochastique (2.7), on a

$$\begin{aligned} \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \sum_{u \in \xi} |\mathcal{C}(u)| &= \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \frac{1}{|\xi|} \sum_{u \in \xi} |\mathcal{C}(u)| \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \frac{1}{|\xi|} \sum_{u \in \xi} \mathcal{U}(u) \\ &\leq 2 \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \Xi(l), \xi' \in \Xi, \xi \subseteq \xi'} \frac{1}{|\xi'|} \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')|^2 \\ &= 2 \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\xi' \in \Xi, |\xi'| \geq l} \frac{1}{|\xi'|} \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')|^2 \\ &= 2 \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{k \geq l} \sup_{\xi' \in \Xi, |\xi'| \geq k} \frac{1}{|\xi'|} \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')|^2 \\ &= 2 \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{k \geq l} \sup_{\xi' \in \Xi(k)} \frac{1}{|\xi'|} \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')|^2 \\ &= 2 \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\xi' \in \Xi(l)} \frac{1}{l} \sum_{u' \in \xi'} |\xi(u')|^2 \\ &= 2 \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \sum_{u \in \xi} |\xi(u)|^2. \end{aligned}$$

Les variables  $(|\xi(u)|^2)_{u \in \mathbb{Z}^d}$  sont i.i.d. et ont des moments exponentiels de tout ordre d'après le théorème 1.5.4 puisque  $p < p_c$ , donc le théorème 2.3.2 s'applique et on obtient le résultat désiré.  $\square$

### 2.3.2 Théorème

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème.

**Théorème 2.3.6** *On a l'équivalence*

$$\mu(p) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad |p| < p_c.$$

**Preuve.** 1) Si  $|p| > p_c$ , alors il existe  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$  tel que  $p_i > p_c$  donc il existe p.s. un cluster infini de couleur  $s_i$  d'après le théorème 1.5.3. Ainsi, p.s. pour  $n$  assez grand,  $B(n)$  n'est plus bornée. Dès que  $B(n)$  contient un point du cluster infini (ce qui arrive nécessairement car  $nB_{|\cdot|} \subseteq B(n)$ ) elle contient tout le cluster infini.

On est alors dans le cas *ii.* du théorème 2.1.1 de forme asymptotique, c'est-à-dire  $\mu = 0$ .

2) Maintenant, si  $|p| = p_c$ , il existe  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$  tel que  $p_i = p_c$  (bien sûr  $|p| = \max_{i \in \llbracket 1, s \rrbracket} p_i$  compte tenu de la condition  $\sum_{i \in \llbracket 1, s \rrbracket} p_i = 1$ ).

Soit

$$X \sim (p)^{\mathbb{Z}^d}.$$

Définissons, pour tout  $u \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$\tilde{X}_u := \mathbb{1}_{\{X_u \neq s_i\}}.$$

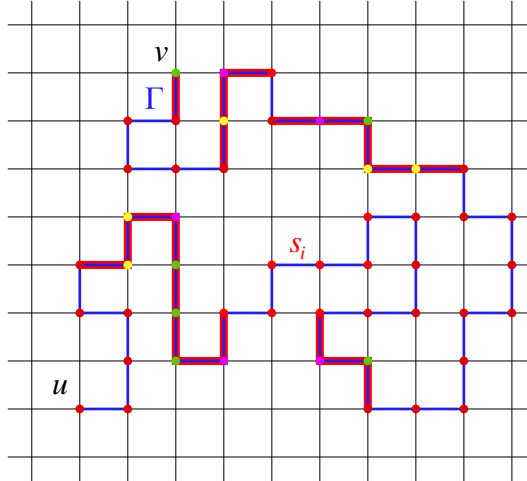
Ainsi, les  $\tilde{X}_u$  sont des v.a. de Bernoulli i.i.d. de paramètre  $1 - p_i = 1 - p_c$ . Notons  $\tilde{\mu}$  la constante de temps associée.

Pour tout  $u, v \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$T(u, v) \leq 2\tilde{T}(u, v),$$

où il s'agit des temps de parcours associés respectivement à  $X$  et  $\tilde{X}$ .

Cette majoration provient du fait que sur un chemin  $\Gamma$ , si deux points sont de couleur  $s_i$  et tels qu'il n'y a pas d'autre point de couleur  $s_i$  entre eux, alors le temps entre ces deux points est majoré par le nombre de points entre eux plus un, donc par deux fois ce nombre (voir figure 2.6).



**FIGURE 2.6** – Majoration de  $T$  par  $2\tilde{T}$

Ainsi, on a aussi

$$\mu \leq 2\tilde{\mu}. \quad (2.8)$$

Or  $\mathbb{P}(\tilde{X}_u = 0) = p_c \geq p_c$ , donc  $\tilde{\mu} = 0$  d'après le théorème 1.5.8 et donc  $\mu = 0$ .

On aurait pu mener le même raisonnement si  $|p| \geq p_c$  mais l'argument donné en 1) est plus simple.

3) Si  $|p| < p_c$ , on va montrer que  $\mu > 0$ . On se ramène au cas  $s < \infty$ . Si  $s = \infty$ , il existe  $S$  tel que  $\sum_{i \geq S} p_i < p_c$ , on considère alors que toutes les couleurs  $s_i, i \geq S$  ne sont qu'une seule et même couleur  $s_S$ . Ceci a pour effet de diminuer les temps de parcours, donc aussi la constante de temps.

Commençons par minorer  $\mu$ . Si  $\Gamma$  est un chemin, notons  $\Gamma^*$  l'ensemble des sites par lesquels il passe. Alors  $T(\Gamma)$  est le nombre de changements de couleur le long de  $\Gamma$ , donc est supérieur au nombre de clusters que  $\Gamma^*$  rencontre moins un : chaque fois que  $\Gamma$  rencontre un nouveau cluster,  $T$  augmente d'un, sauf pour le cluster dans lequel  $\Gamma$  commence (voir figure 2.7).

Donc, en notant encore  $\mathcal{C}(u)$  le cluster du point  $u \in \mathbb{Z}^d$ , et

$$C := \{\mathcal{C} \text{ cluster} \mid \mathcal{C} \cap \Gamma^* \neq \emptyset\},$$

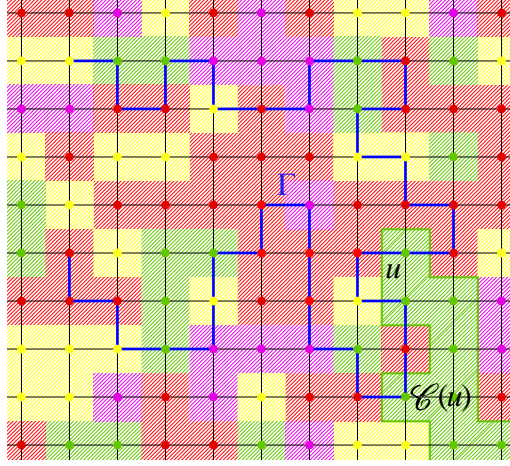


FIGURE 2.7 – Minoration de  $\mu$

alors en remarquant que  $\{\mathcal{C} \cap \Gamma^*, \mathcal{C} \in \mathcal{C}\}$  forme une partition de  $\Gamma^*$ , on a

$$\begin{aligned}
1 + T(\Gamma) &\geq |\mathcal{C}| \\
&= \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} 1 \\
&= \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} \sum_{u \in \mathcal{C} \cap \Gamma^*} \frac{1}{|\mathcal{C} \cap \Gamma^*|} \\
&= \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} \sum_{u \in \mathcal{C} \cap \Gamma^*} \frac{1}{|\mathcal{C}(u) \cap \Gamma^*|} \\
&= \sum_{u \in \Gamma^*} \frac{1}{|\mathcal{C}(u) \cap \Gamma^*|}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1 + T(0, k\varepsilon_1)}{k} &= \inf_{0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} k\varepsilon_1} \frac{1 + T(\Gamma)}{k} \\
&\geq \inf_{0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} k\varepsilon_1} \frac{1}{k} \sum_{u \in \Gamma^*} \frac{1}{|\mathcal{C}(u) \cap \Gamma^*|} \\
&\geq \inf_{0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} k\varepsilon_1} \frac{1}{|\Gamma^*|} \sum_{u \in \Gamma^*} \frac{1}{|\mathcal{C}(u) \cap \Gamma^*|} \\
&\geq \inf_{0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} k\varepsilon_1} \left( \frac{1}{|\Gamma^*|} \sum_{u \in \Gamma^*} |\mathcal{C}(u) \cap \Gamma^*| \right)^{-1} \\
&\geq \inf_{0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} k\varepsilon_1} \left( \frac{1}{|\Gamma^*|} \sum_{u \in \Gamma^*} |\mathcal{C}(u)| \right)^{-1} \\
&\geq \inf_{0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \cdot, |\Gamma^*| \geq k} \left( \frac{1}{|\Gamma^*|} \sum_{u \in \Gamma^*} |\mathcal{C}(u)| \right)^{-1} \\
&= \inf_{l \geq k} \inf_{0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \cdot, |\Gamma^*| = l} \left( \frac{1}{l} \sum_{u \in \Gamma^*} |\mathcal{C}(u)| \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

L'inégalité de la troisième ligne provient du fait que si  $0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} k\varepsilon_1$ , alors  $|\Gamma^*| \geq k$ , celle de la quatrième est l'inégalité de Jensen pour la fonction concave  $x \mapsto \frac{1}{x}$ . On rappelle que la notation  $0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \cdot$  signifie que  $\Gamma$  est un chemin auto-évitant issu de 0.

En passant à la limite p.s.  $k \rightarrow \infty$ , il vient,

$$\mu \geq \left( \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{0 \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \cdot, |\Gamma^*| = l} \frac{1}{l} \sum_{u \in \Gamma^*} |\mathcal{C}(u)| \right)^{-1}.$$

Il suffit donc de montrer que, p.s.

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\Gamma \\ 0 \overset{\curvearrowright}{\rightsquigarrow} \cdot, |\Gamma^*|=l}} \frac{1}{l} \sum_{u \in \Gamma^*} |\mathcal{C}(u)| < \infty.$$

Si on note, pour  $u \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$\mathcal{C}_i(u) := \begin{cases} \mathcal{C}(u) & \text{si } X_u = s_i \\ \emptyset & \text{si } X_u \neq s_i \end{cases},$$

on a pour tout  $u \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$\mathcal{C}(u) = \bigsqcup_{i=1}^s \mathcal{C}_i,$$

où la notation  $\bigsqcup$  désigne l'union disjointe.

Ainsi,

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\Gamma \\ 0 \overset{\curvearrowright}{\rightsquigarrow} \cdot, |\Gamma^*|=l}} \frac{1}{l} \sum_{u \in \Gamma^*} |\mathcal{C}(u)| = \sum_{i=1}^s \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\Gamma \\ 0 \overset{\curvearrowright}{\rightsquigarrow} \cdot, |\Gamma^*|=l}} \frac{1}{l} \sum_{u \in \Gamma^*} |\mathcal{C}_i(u)|.$$

Étant donné que l'on s'est ramené au cas  $s < \infty$ , il s'agit donc de montrer que, pour tout  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ , p.s.

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\Gamma \\ 0 \overset{\curvearrowright}{\rightsquigarrow} \cdot, |\Gamma^*|=l}} \frac{1}{l} \sum_{u \in \Gamma^*} |\mathcal{C}_i(u)| < \infty.$$

Or

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\Gamma \\ 0 \overset{\curvearrowright}{\rightsquigarrow} \cdot, |\Gamma^*|=l}} \frac{1}{l} \sum_{u \in \Gamma^*} |\mathcal{C}_i(u)| \leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \frac{1}{l} \sum_{u \in \xi} |\mathcal{C}_i(u)|$$

où l'ensemble  $\Xi(l)$  a été défini précédemment par (2.5) : pour tout chemin  $\Gamma$  auto-évitant issu de 0,  $\Gamma^*$  est bien sûr un animal.

Mais les  $\mathcal{C}_i(u)$ ,  $u \in \mathbb{Z}^d$  sont les clusters d'une percolation (par site) de paramètre  $p_i < p_c$  (c.f. (1.22)), le théorème 2.3.5 permet donc de conclure que, pour tout  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ ,

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \frac{1}{l} \sum_{u \in \xi} |\mathcal{C}_i(u)| < \infty,$$

ce qui achève la preuve de ce théorème.  $\square$

## 2.4 Coloriages dépendants

On cherche à étendre le résultat du théorème 2.3.6 à des coloriages aléatoires dépendants. On considère toujours une famille  $(X_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$  de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathcal{S}$ , mais au lieu de les supposer i.i.d., on suppose simplement que cette famille a une loi invariante par translation et qu'elle est ergodique.

On définit encore les temps d'arêtes par la relation

$$t(\{u, v\}) = \mathbb{1}_{\{X_u \neq X_v\}}.$$

Ces temps d'arête héritent des propriétés d'invariance par translation et d'ergodicité de la famille  $(X_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$ , et le théorème 1.4.1 s'applique toujours. En revanche, on n'a pas en général une unique constante de temps  $\mu$  comme c'était le cas précédemment.

On connaît néanmoins une condition garantissant qu'on se trouve dans le cas *i.* du théorème de forme asymptotique, c'est-à-dire dans le cas où la forme asymptotique n'est pas  $\mathbb{R}^d$  tout entier.

Pour  $u \in \mathbb{Z}^d$ , notons

$$\mathcal{G}_u := \sigma(X_v, v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{u\}),$$

la tribu des événements qui ne dépendent pas de ce qu'il se passe en  $u$ .

**Théorème 2.4.1** *Pour que toutes les constantes de temps soient strictement positives (cas i. du théorème 1.4.1), il suffit que*

$$\sup_{i \in \llbracket 1, s \rrbracket} \mathbb{P}(X_0 = s_i \mid \mathcal{G}_0) < p_c.$$

**Remarque.** En notant  $p$  la loi des  $X_u$  conditionnellement à  $\mathcal{G}_u$  (qui ne dépend pas de  $u \in \mathbb{Z}^d$  par invariance par translation), on retrouve la même condition que pour le théorème 2.3.6, à savoir  $|p| < p_c$ .

**Preuve.** On procède de la même manière qu'au cas 3) de la preuve du théorème 2.3.6. On commence par se ramener au cas  $s < \infty$  puis on mène les mêmes calculs et on est amené à montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ ,

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \frac{1}{l} \sum_{u \in \xi} |\mathcal{C}_i(u)| < \infty.$$

Les  $\mathcal{C}_i(u)$  ne sont plus les clusters d'une percolation (indépendante) par site. Fixons  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$  et définissons les v.a.

$$N_u := \mathbb{1}_{\{X_u = s_i\}},$$

de sorte que les  $\mathcal{C}_i(u)$  sont les clusters de la percolation dépendante  $(N_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$ . Soit encore une famille  $(\tilde{N}_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$  de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $|p|$ .

Nous allons montrer la domination stochastique<sup>4</sup> suivante :

$$(N_u)_{u \in \mathbb{Z}^d} \preceq (\tilde{N}_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}. \quad (2.9)$$

Pour cela, nous allons montrer que pour toute fonction  $f$  croissante sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ f \left( (N_u)_{u \in \mathbb{Z}^d} \right) \right] \leq \mathbb{E} \left[ f \left( (\tilde{N}_u)_{u \in \mathbb{Z}^d} \right) \right]. \quad (2.10)$$

Pour toute fonction  $g$  croissante sur  $\{0, 1\}$ , et  $u \in \mathbb{Z}^d$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(N_u) \mid \mathcal{G}_u] &= g(0) \mathbb{P}(N_u = 0 \mid \mathcal{G}_u) + g(1) \mathbb{P}(N_u = 1 \mid \mathcal{G}_u) \\ &= g(0) + \underbrace{(g(1) - g(0)) \mathbb{P}(X_u = s_i \mid \mathcal{G}_u)}_{\geq 0} \\ &\leq g(0) + (g(1) - g(0)) |p| \\ &= g(0) (1 - |p|) + g(1) |p| \\ &= \mathbb{E} \left[ g \left( \tilde{N}_u \right) \right]. \end{aligned}$$

Donc si  $f$  est de la forme

$$f((\omega(u))_{u \in \mathbb{Z}^d}) = f_1(\omega(u_1)) f_2(\omega(u_2)) \dots f_m(\omega(u_m)),$$

avec les  $u_i$ ,  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , distincts, alors les  $f_i$ ,  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , sont croissantes sur  $\{0, 1\}$  et

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ f \left( (N_u)_{u \in \mathbb{Z}^d} \right) \right] &= \mathbb{E} [f_1(N_{u_1}) f_2(N_{u_2}) \dots f_m(N_{u_m})] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [f_1(N_{u_1}) f_2(N_{u_2}) \dots f_m(N_{u_m}) \mid \mathcal{G}_{u_1}]] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [f_1(N_{u_1}) \mid \mathcal{G}_{u_1}] f_2(N_{u_2}) \dots f_m(N_{u_m})] \\ &\vdots \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [f_1(N_{u_1}) \mid \mathcal{G}_{u_1}] \mathbb{E} [f_2(N_{u_2}) \mid \mathcal{G}_{u_2}] \dots \mathbb{E} [f_m(N_{u_m}) \mid \mathcal{G}_{u_m}]] \\ &\leq \mathbb{E} [\mathbb{E} [f_1(\tilde{N}_{u_1})] \mathbb{E} [f_2(\tilde{N}_{u_2})] \dots \mathbb{E} [f_m(\tilde{N}_{u_m})]] \\ &= \mathbb{E} [f_1(\tilde{N}_{u_1}) f_2(\tilde{N}_{u_2}) \dots f_m(\tilde{N}_{u_m})] \\ &= \mathbb{E} \left[ f \left( (\tilde{N}_u)_{u \in \mathbb{Z}^d} \right) \right]. \end{aligned}$$

On a utilisé dans l'ordre le fait que pour  $i \neq j$ ,  $N_{u_i}$  est  $\mathcal{G}_{u_j}$ -mesurable, l'inégalité précédente, et le fait que les  $\tilde{N}_u$ ,  $u \in \mathbb{Z}^d$ , sont indépendantes. On conclut que l'inégalité (2.10) est vraie pour toute fonction croissante sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$  à l'aide du lemme de classe monotone.

La domination stochastique (2.9) implique la suivante :

$$\left( |\mathcal{C}_i(u)| \right)_{u \in \mathbb{Z}^d} \preceq \left( |\mathcal{C}(u)| \right)_{u \in \mathbb{Z}^d},$$

où les  $\mathcal{C}(u)$ ,  $u \in \mathbb{Z}^d$ , sont les clusters d'une percolation (indépendante, par site) de paramètre  $|p| < p_c$ . En effet, il existe une fonction croissante déterministe  $\varphi$  telle que

$$\left( |\mathcal{C}_i(u)| \right)_{u \in \mathbb{Z}^d} = \varphi \left( (N_u)_{u \in \mathbb{Z}^d} \right) \quad \text{et} \quad \left( |\mathcal{C}(u)| \right)_{u \in \mathbb{Z}^d} = \varphi \left( (\tilde{N}_u)_{u \in \mathbb{Z}^d} \right).$$

On a alors

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \frac{1}{l} \sum_{u \in \xi} |\mathcal{C}_i(u)| \leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \frac{1}{l} \sum_{u \in \xi} |\mathcal{C}(u)| < \infty,$$

grâce au théorème 2.3.5. □

## 2.5 Quelques simulations

Dans le cas général, il n'est pas toujours aisé de calculer les  $T(0, u)$ , pour  $u \in \mathbb{Z}^d$ , surtout dans le cas où les temps d'arrêt ne sont pas minorés par une constante strictement positive (comme c'est le cas pour les coloriage aléatoires), car il faut considérer un infimum sur un ensemble infini. L'idée pour simuler  $B(t')$  à partir de  $B(t)$ ,  $t < t'$  est de faire grossir  $B(t)$  en regardant les points que l'on peut atteindre à partir de  $B(t)$  en restant en dessous de  $t'$ . En procédant ainsi, on obtient à chaque étape un majorant des  $T(0, u)$  pour les  $u \in B(t)$ .

Cette méthode impose de considérer beaucoup de chemins et donc de faire beaucoup de calculs. Dans le cas des coloriage aléatoires de  $\mathbb{Z}^2$ , on peut facilement simuler l'évolution de  $B(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , à l'aide de la proposition 1.2.2, il suffit de rajouter à  $B(n)$  les clusters des points de  $\partial B(n)$  pour obtenir  $B(n+1)$ .

Sur la figure 2.8, on peut voir une réalisation de  $B(100)$  (en blanc),  $\partial B(100)$  (en noir) sur  $\llbracket -250, 250 \rrbracket^2$  où les couleurs sont uniformes sur {bleu clair, bleu foncé, violet, jaune}.

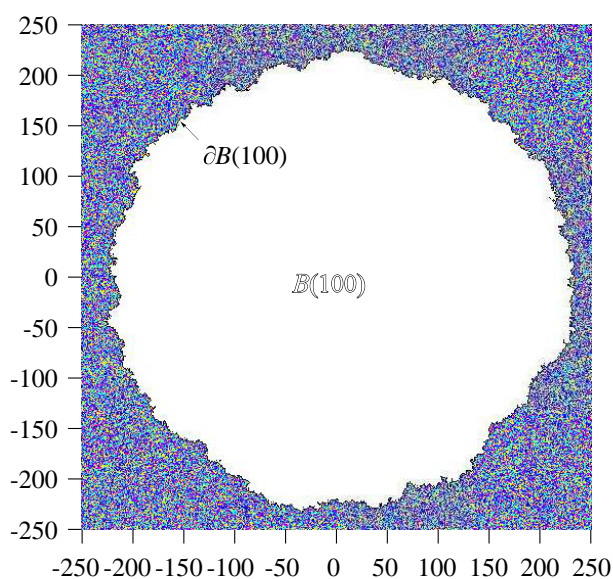


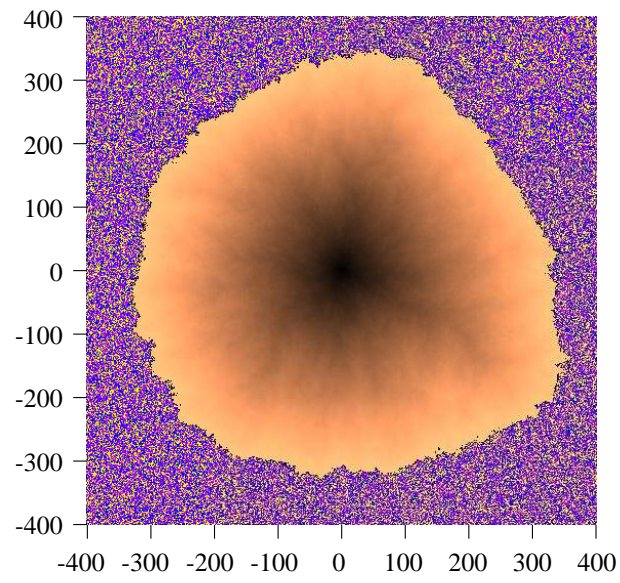
FIGURE 2.8 – Simulation de  $B(100)$

Sur la figure 2.9, on peut voir une réalisation d'un coloriage aléatoire sur  $\llbracket -400, 400 \rrbracket^2$  où les couleurs sont uniformes sur {bleu, violet, jaune}. Au centre, toutes les  $B(i+1) \setminus B(i)$ ,  $i \in \llbracket 0, 99 \rrbracket$ , sont représentés avec des teintes de plus en plus claires. On peut ainsi voir tous les  $B(i)$ ,  $i \in \llbracket 0, 99 \rrbracket$ , en regardant les points plus foncés qu'une teinte donnée. Il s'agit, au cadre près, de l'illustration de la couverture.

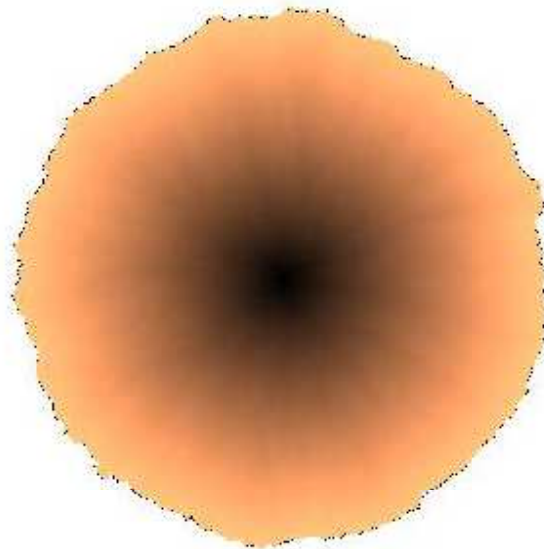
Enfin, sur la figure 2.10, il s'agit d'un coloriage aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$  où  $s = 4$  et les couleurs sont uniformes. On n'a représenté que les  $B(i+1) \setminus B(i)$ ,  $i \in \llbracket 0, 299 \rrbracket$ , avec le même procédé que sur la figure 2.9. On voit la forme asymptotique se dessiner petit à petit.

D'autres simulations sont disponibles sur mon site web<sup>5</sup>, notamment des vidéos représentant l'évolution de  $B(n)$ .

5. dont l'adresse est : [www.eleves.ens.fr/home/bettinel/Fpp.html](http://www.eleves.ens.fr/home/bettinel/Fpp.html)



**FIGURE 2.9** – *Simulation de  $B(0), B(1), \dots B(100)$*



**FIGURE 2.10** – *Simulation de  $B(0), B(1), \dots B(300)$*

# Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Olivier GARET qui m'a proposé ce sujet et m'a aidé, conseillé et encadré tout au long de la rédaction de ce mémoire, en particulier au cours de l'élaboration de la section 2.2. Je tiens à remercier également Bernard BETTINELLI, Nicolas CURIEN, Hugo DUMINIL, Thibault ESPINASSE et Adrien JOSEPH pour leur relecture attentive.

# Références

- [1] Daniel BOIVIN. *First Passage Percolation : The Stationary Case*. Probability Theory Related Fields, **86** :491–499, 1990.
- [2] J. Theodore COX. *The Time Constant of First-Passage Percolation on the Square Lattice*. Advances in Applied Probability, **12**(4) :864–879, 1980.
- [3] J. Theodore COX and Richard DURRETT. *Some Limit Theorems for Percolation Processes with Necessary and Sufficient Conditions*. The Annals of Applied Probability, **9**(4) :583–603, 1981.
- [4] J. Theodore COX, Alberto GANDOLFI, Philip S. GRIFFIN, and Harry KESTEN. *Greedy Lattice Animals I : Upper Bounds*. The Annals of Applied Probability, **3**(4) :1151–1169, 1993.
- [5] J. Theodore COX and Harry KESTEN. *On the Continuity of the Time Constant of First-Passage Percolation*. Journal of Applied Probability, **18**(4) :809–819, 1981.
- [6] Luiz FONTES and Charles M. NEWMAN. *First Passage Percolation For Random Colorings of  $\mathbb{Z}^d$* . The Annals of Applied Probability, **3**(3) :746–762, 1993.
- [7] Hans-Otto GEORGII, Olle HÄGGSTRÖM, and Christian MAES. *The Random Geometry of Equilibrium Phases*. eprint arXiv : math/9905031, <http://arxiv.org/abs/math/9905031>, 1999.
- [8] Geoffrey R. GRIMMETT. *Percolation*. New York ; Berlin ; Paris : Springer, 1989.
- [9] C. Douglas HOWARD. *Models of First Passage Percolation*. In Harry KESTEN, editor, *Probability on Discrete Structures*, volume **110** of Encyclopaedia of Mathematical Sciences, pages 126–173. Berlin ; New York ; Paris : Springer, 2004.
- [10] Harry KESTEN. *On the Time Constant and Path Length of First-Passage Percolation*. Advances in Applied Probability, **12**(4) :848–863, **3**(3) :746–762, 1980.
- [11] Harry KESTEN. *Aspects of First Passage Percolation*. In Paul-Louis HENNEQUIN, editor, *École d'été de probabilités de Saint-Flour XIV*, volume **1180** of Lecture Notes in Mathematics, pages 125–264. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1986.
- [12] J.F.C. KINGMAN. *The Ergodic Theory of Subadditive Stochastic Processes*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), **30**(3) :499–510, 1968.
- [13] Thomas M. LIGGETT. *An Improved Subadditive Ergodic Theorem*. The Annals of Applied Probability, **13**(4) :1279–1285, 1985.