Percolation de premier passage

et

Coloriages aléatoires de $\mathbb{Z}^d$

Jérémie BETTINELLI

Avril 2008

Mémoire réalisé sous la direction d'Olivier GARET

Percolation de premier passage

Application aux coloriages aléatoires

3. Continuité de la constante de temps
   - Topologie
   - Constante de connectivité
   - Théorèmes
4. Théorème de forme asymptotique
   - Rappel du théorème
   - Critère de distinction entre les deux cas
   - Cas des coloriages dépendants
5. Simulations informatiques

Percolation de premier passage

1. Définitions des modèles
   - Modèle général
   - Cas standards
   - Coloriages aléatoires

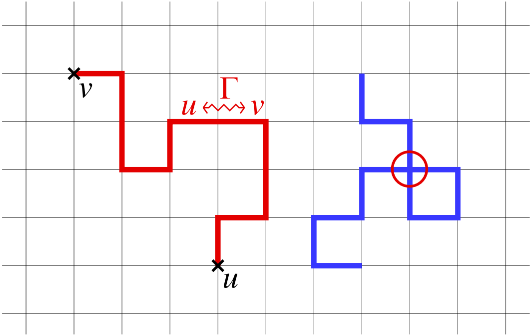
2. Résultats généraux
   - Constantes de temps
   - Forme asymptotique

Présentation du modèle

- Introduite en 1965 par HAMMERSLEY et WELSH
- Sert à modéliser la propagation d'un fluide à travers un matériau poreux
- Le matériau est assimilé au graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, $d \geq 2$
- Deux points de vue :
  - "Quand un point donné sera-t-il atteint ?"
  - "Comment évolue la zone imprégnée ?"

Chemins, chemins auto-évitants

- **Chemin** de u à v : $u \overset{\Gamma}{\leftrightsquigarrow} v$
- **Chemin auto-évitant** : $u \overset{\Gamma}{\widehat{\leftrightsquigarrow}} v$



Temps d'arête, de passage, de voyage

- **Temps d'arête** : v.a. positives $t(e)$, $e \in \mathbb{E}^d$
- **Temps de passage** de $\Gamma = (e_1, e_2, \dots, e_n)$:

$$T(\Gamma) := \sum_{i=1}^{n} t(e_i)$$

- **Temps de voyage** de u à v :

$$T(u,v) := \inf_{u \overset{\Gamma}{\leftrightsquigarrow} v} T(\Gamma) = \inf_{u \overset{\Gamma}{\overset{\frown}{\leftrightsquigarrow}} v} T(\Gamma)$$

- À $x \in \mathbb{R}^d$, on associe un $x^* \in \mathbb{Z}^d$ tel que $|x - x^*|$ soit minimal.

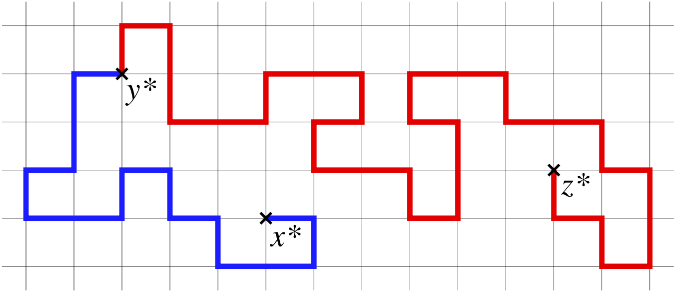
$$T(x,y) := T(x^*, y^*)$$

Inégalité triangulaire

Proposition (Inégalité triangulaire)

Quels que soient x, y, z dans $\mathbb{R}^d$, on a l'inégalité :

$$T(x,z) \leq T(x,y) + T(y,z).$$



Zone imprégnée

- À $t \in \mathbb{R}_+$, la zone imprégnée (discrète) est

$$\tilde{B}(t) := \left\{ u \in \mathbb{Z}^d \mid T(0,u) \leq t \right\}$$

- On définit

$$B(t) := \tilde{B}(t) + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d$$

Proposition

On a

$$B(t) = \overline{\left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid T(0,x) \leq t \right\}}.$$

Zone imprégnée

- À $t \in \mathbb{R}_+$, la zone imprégnée (discrète) est

$$\tilde{B}(t) := \left\{ u \in \mathbb{Z}^d \mid T(0,u) \leq t \right\}$$

- On définit

$$B(t) := \tilde{B}(t) + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d$$

Proposition

On a

$$B(t) = \overline{\left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid T(0,x) \leq t \right\}}.$$

Zone imprégnée

- À $t \in \mathbb{R}_+$, la zone imprégnée (discrète) est

$$\tilde{B}(t) := \left\{ u \in \mathbb{Z}^d \mid T(0,u) \leq t \right\}$$

- On définit

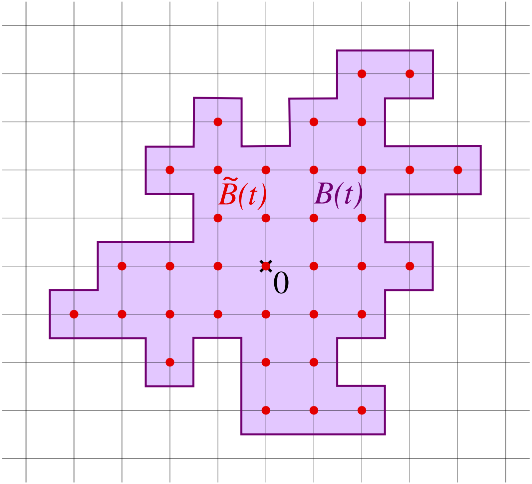
$$B(t) := \tilde{B}(t) + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d$$

Proposition

On a

$$B(t) = \overline{\left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid T(0,x) \leq t \right\}}.$$

Représentation de $\tilde{B}(t)$ et $B(t)$



Cas i.i.d. et indépendant invariant par translation

- $t(e)$ i.i.d :

$$\big(t(e)\big)_{e\in\mathbb{E}^d} \sim \mu^{\otimes\mathbb{E}^d}$$

- $t(e)$ ne dépendant que de la direction :

$$\big(t(e)\big)_{e\in\mathbb{E}^d} \sim \mu_1^{\otimes\mathbb{E}} \otimes \mu_2^{\otimes\mathbb{E}} \otimes \ldots \otimes \mu_d^{\otimes\mathbb{E}})$$

Cas i.i.d. et indépendant invariant par translation

- $t(e)$ i.i.d :

$$\big(t(e)\big)_{e\in\mathbb{E}^d} \sim \mu^{\otimes\mathbb{E}^d}$$

- $t(e)$ ne dépendant que de la direction :

$$\big(t(e)\big)_{e\in\mathbb{E}^d} \sim \mu_1^{\otimes\mathbb{E}} \otimes \mu_2^{\otimes\mathbb{E}} \otimes \ldots \otimes \mu_d^{\otimes\mathbb{E}})$$

Définitions

On se donne :

- Un ensemble $\mathscr{S}$ de **couleurs** fini ou dénombrable de cardinal s,

$$\mathscr{S} = \{s_i, i \in [\![1, s]\!]\}$$

$$([\![1, s]\!] = \mathbb{N}^* \text{ si } s = \infty)$$

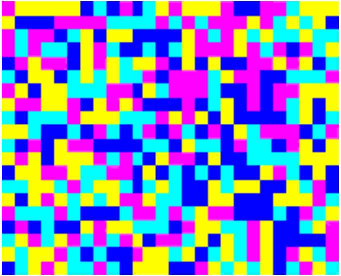
- Une famille

$$(X_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$$

de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathscr{S}$

Exemple, clusters

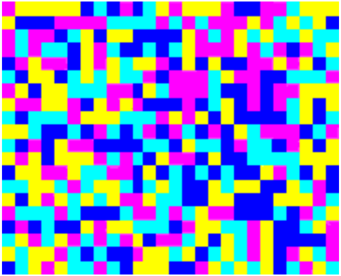
Ici, $d = 2$, $\mathscr{S} = \{\text{jaune}, \text{ bleu clair}, \text{ bleu foncé}, \text{ violet}\}$, et les $(X_u)_{u \in \mathbb{Z}^2}$ sont uniformes :



- **Cluster** : c.c. de $\{\mathbb{Z}^d, \{\{u, v\} \in \mathbb{E}^d \mid X_u = X_v\}\}$
- Pour $u \in \mathbb{Z}^d$, on note $\mathscr{C}(u)$ l'unique cluster auquel il appartient

Exemple, clusters

Ici, $d = 2$, $\mathscr{S} = \{\text{jaune}, \text{bleu clair}, \text{bleu foncé}, \text{violet}\}$, et les $(X_u)_{u \in \mathbb{Z}^2}$ sont uniformes :



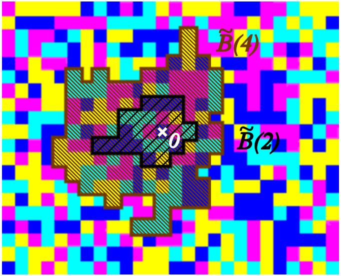
- **Cluster** : c.c. de $\left\{\mathbb{Z}^d, \{\{u, v\} \in \mathbb{E}^d \mid X_u = X_v\}\right\}$
- Pour $u \in \mathbb{Z}^d$, on note $\mathscr{C}(u)$ l'unique cluster auquel il appartient

Points atteignables en traversant moins de n frontières

- $\tilde{B}(n)$: ensemble des points de $\mathbb{Z}^d$ que l'on peut atteindre en partant de l'origine en traversant au plus n "frontières"

Points atteignables en traversant moins de n frontières

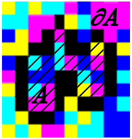
- $\tilde{B}(n)$: ensemble des points de $\mathbb{Z}^d$ que l'on peut atteindre en partant de l'origine en traversant au plus n "frontières"



Relation de récurrence

- **Frontière** (extérieure) de $A \subseteq \mathbb{Z}^d$:

$$\partial A := \left\{ u \in \mathbb{Z}^d \backslash A \mid \exists v \in A, \{u, v\} \in \mathbb{E}^d \right\}$$



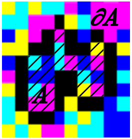
Proposition

$$\tilde{B}(0) = \mathscr{C}(0) \quad et \quad \tilde{B}(n+1) = \tilde{B}(n) \cup \bigcup_{u \in \partial \tilde{B}(n)} \mathscr{C}(u).$$

Relation de récurrence

- **Frontière** (extérieure) de $A \subseteq \mathbb{Z}^d$:

$$\partial A := \left\{ u \in \mathbb{Z}^d \backslash A \mid \exists v \in A, \{u, v\} \in \mathbb{E}^d \right\}$$



Proposition

$$\tilde{B}(0) = \mathscr{C}(0) \quad et \quad \tilde{B}(n+1) = \tilde{B}(n) \cup \bigcup_{u \in \partial \tilde{B}(n)} \mathscr{C}(u).$$

Lien avec le modèle général

Il s'agit bien d'un modèle de percolation de premier passage

- Temps d'arête : $t(\{u,v\}) = \mathbf{1}_{\{X_u \neq X_v\}}$
- Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on définit

$$\tilde{B}(t) := \tilde{B}(\lfloor t \rfloor)$$

- Les (X_u) sont i.i.d., mais pas les temps d'arête

Lien avec le modèle général

Il s'agit bien d'un modèle de percolation de premier passage

- Temps d'arête : $t(\{u,v\}) = \mathbf{1}_{\{X_u \neq X_v\}}$
- Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on définit

$$\tilde{B}(t) := \tilde{B}(\lfloor t \rfloor)$$

- Les (X_u) sont i.i.d., mais pas les temps d'arête

Percolation de premier passage

Cadre

On suppose que

- la loi de $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est invariante par translation
- $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est ergodique
- $\mathbb{E}\left[T(0,\varepsilon_i)\right] < \infty$

Dans les cas standards, on rajoute $\mathbb{E}\left[t(\{0,\varepsilon_i\})\right] < \infty$

Proposition

Dans le cas d'un modèle de percolation de premier passage standard ou d'un coloriage aléatoire, la famille de temps d'arête $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est ergodique.

Cadre

On suppose que

- √ la loi de $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est invariante par translation
- $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est ergodique
- $\mathbb{E}\left[T(0,\varepsilon_i)\right] < \infty$

Dans les cas standards, on rajoute $\mathbb{E}\left[t(\{0,\varepsilon_i\})\right] < \infty$

Proposition

Dans le cas d'un modèle de percolation de premier passage standard ou d'un coloriage aléatoire, la famille de temps d'arête $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est ergodique.

Cadre

On suppose que

- √ la loi de $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est invariante par translation
- $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est ergodique
- √ $\mathbb{E}\left[T(0,\varepsilon_i)\right] < \infty$

Dans les cas standards, on rajoute $\mathbb{E}\left[t(\{0,\varepsilon_i\})\right] < \infty$

Proposition

Dans le cas d'un modèle de percolation de premier passage standard ou d'un coloriage aléatoire, la famille de temps d'arête $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est ergodique.

Cadre

On suppose que

- √ la loi de $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est invariante par translation
- √ $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est ergodique
- √ $\mathbb{E}\left[T(0,\varepsilon_i)\right] < \infty$

Dans les cas standards, on rajoute $\mathbb{E}\left[t(\{0,\varepsilon_i\})\right] < \infty$

Proposition

Dans le cas d'un modèle de percolation de premier passage standard ou d'un coloriage aléatoire, la famille de temps d'arête $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ *est ergodique.*

Théorème sous-additif ergodique de T. LIGGETT

Soit $(X_{m,n})_{0\leq m<n}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que :

1. $\forall\, 0 < m < n,\ X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$
2. la loi jointe de $\left(X_{k,n+k}\right)_{n\geq 1}$ ne dépend pas de k ($k \geq 0$)
3. pour tout $k \geq 1$, $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ est un processus stationnaire
4. $\mathbb{E}\left[X_{0,1}^{+}\right] < \infty$, et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 1, \mathbb{E}\left[X_{0,n}\right] \geq -cn$$

Théorème sous-additif ergodique de T. LIGGETT

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[X_{0,n}\right]}{n} \text{ existe et vaut } \gamma := \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathbb{E}\left[X_{0,n}\right]}{n}$$

$$X := \lim_{n\to\infty} \frac{X_{0,n}}{n} \text{ existe p.s. et dans } \mathbb{L}^1 \text{ et } \mathbb{E}\left[X\right] = \gamma$$

De plus, si les processus $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ sont ergodiques, alors

$$X = \gamma \text{ p.s.}$$

Application du théorème

On l'applique à

$$X_{m,n} := T(m\varepsilon_1, n\varepsilon_1)$$

1. $\forall\, 0 < m < n,\ X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$
2. la loi jointe de $\left(X_{k,n+k}\right)_{n\geq 1}$ ne dépend pas de k ($k \geq 0$)
3. pour tout $k \geq 1$, $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ est un processus stationnaire
4. $\mathbb{E}\left[X_{0,1}^{+}\right] < \infty$, et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 1, \mathbb{E}\left[X_{0,n}\right] \geq -cn$$

5. les processus $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ sont ergodiques

Application du théorème

On l'applique à

$$X_{m,n} := T(m\varepsilon_1, n\varepsilon_1)$$

- $\surd$ $\forall\, 0 < m < n,\ X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$
- 2 la loi jointe de $\left(X_{k,n+k}\right)_{n\geq 1}$ ne dépend pas de k ($k \geq 0$)
- 3 pour tout $k \geq 1$, $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ est un processus stationnaire
- 4 $\mathbb{E}\left[X_{0,1}^{+}\right] < \infty$, et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 1, \mathbb{E}\left[X_{0,n}\right] \geq -cn$$

- 5 les processus $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ sont ergodiques

Application du théorème

On l'applique à

$$X_{m,n} := T(m\varepsilon_1, n\varepsilon_1)$$

- √ $\forall\, 0 < m < n,\ X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$
- √ la loi jointe de $\left(X_{k,n+k}\right)_{n\geq 1}$ ne dépend pas de k ($k \geq 0$)
- √ pour tout $k \geq 1$, $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ est un processus stationnaire

4. $\mathbb{E}\left[X_{0,1}^{+}\right] < \infty$, et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 1, \mathbb{E}\left[X_{0,n}\right] \geq -cn$$

5. les processus $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ sont ergodiques

Application du théorème

On l'applique à

$$X_{m,n} := T(m\varepsilon_1, n\varepsilon_1)$$

- √ $\forall\, 0 < m < n,\ X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$
- √ la loi jointe de $\left(X_{k,n+k}\right)_{n\geq 1}$ ne dépend pas de k ($k \geq 0$)
- √ pour tout $k \geq 1$, $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ est un processus stationnaire
- √ $\mathbb{E}\left[X_{0,1}^{+}\right] < \infty$, et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 1, \mathbb{E}\left[X_{0,n}\right] \geq -cn$$

5. les processus $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ sont ergodiques

Application du théorème

On l'applique à

$$X_{m,n} := T(m\varepsilon_1, n\varepsilon_1)$$

- $\surd$ $\forall\, 0 < m < n,\ X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$
- $\surd$ la loi jointe de $\left(X_{k,n+k}\right)_{n\geq 1}$ ne dépend pas de k ($k \geq 0$)
- $\surd$ pour tout $k \geq 1$, $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ est un processus stationnaire
- $\surd$ $\mathbb{E}\left[X_{0,1}^{+}\right] < \infty$, et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 1, \mathbb{E}\left[X_{0,n}\right] \geq -cn$$

5. les processus $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ sont ergodiques

Application du théorème

On l'applique à

$$X_{m,n} := T(m\varepsilon_1, n\varepsilon_1)$$

- $\surd$ $\forall\, 0 < m < n,\ X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$
- $\surd$ la loi jointe de $\left(X_{k,n+k}\right)_{n\geq 1}$ ne dépend pas de k ($k \geq 0$)
- $\surd$ pour tout $k \geq 1$, $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ est un processus stationnaire
- $\surd$ $\mathbb{E}\left[X_{0,1}^{+}\right] < \infty$, et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 1, \mathbb{E}\left[X_{0,n}\right] \geq -cn$$

- $\surd$ les processus $\left(X_{kn,k(n+1)}\right)_{n\geq 0}$ sont ergodiques

Constantes de temps

Proposition

Si $\mathbb{E}\left[T(0,\varepsilon_1)\right] < \infty$*, alors il existe un constante* $\mu_i \in \mathbb{R}_+$ *telle que*

$$\frac{T(0, n\varepsilon_1)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.,\ \mathbb{L}^1} \mu_i.$$

Définition

Les constantes μ_i *sont appelées les* ***constantes de temps****.*
Lorsqu'elles sont toutes égales, on note μ *la valeur commune et on la nomme* ***constante de temps****.*

Dans le cas i.i.d. ou dans le cas de coloriages aléatoires, il n'y a qu'une constante de temps

Théorème de forme asymptotique de Y. DERRIENNIC

On suppose que

- la loi de $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est invariante par translation
- la famille $\left(t(e)\right)_{e\in\mathbb{E}^d}$ est ergodique
- les $(t(e))_{e\in\mathbb{E}^d}$ sont bornés

Alors

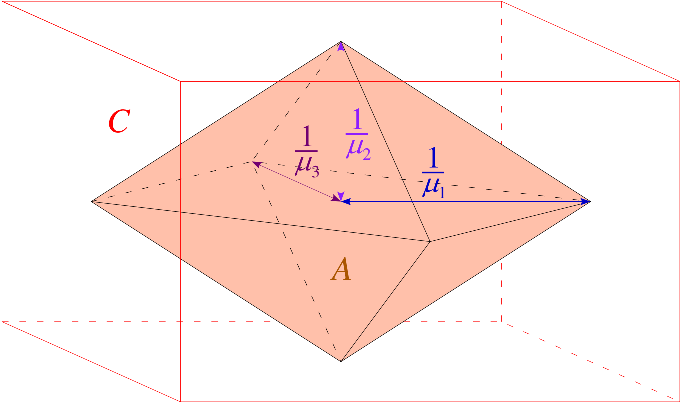
1. Si tous les μ_i sont strictement positifs, alors il existe un convexe compact déterministe d'intérieur non vide $B_0 \subseteq \mathbb{R}^d$, symétrique par rapport aux hyperplans d'équation $x_i = 0$, tel que, p.s., pour tout $\varepsilon > 0$, pour t assez grand, on ait

$$(1 - \varepsilon)B_0 \subseteq \frac{1}{t}B(t) \subseteq (1 + \varepsilon)B_0.$$

2. Si tous les μ_i sont nuls, alors, p.s., pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}^d$, pour t assez grand, on a

$$K \subseteq \frac{1}{t}B(t).$$

Encadrement de B_0



$$A \subseteq B_0 \subseteq C$$

Application aux coloriages aléatoires

3. Continuité de la constante de temps
   - Topologie
   - Constante de connectivité
   - Théorèmes

4. Théorème de forme asymptotique
   - Rappel du théorème
   - Critère de distinction entre les deux cas
   - Cas des coloriages dépendants

5. Simulations informatiques

Mesures de probabilité sur $\mathscr{S}$

On identifie l'ensemble des probabilités sur $\mathscr{S}$ à

$$P(\mathscr{S}) := \left\{ (p_1, p_2, \ldots, p_s) \in [0,1]^{\mathscr{S}} \mid \sum_{i=1}^{s} p_i = 1 \right\}.$$

Si $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ et $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s) \in P(\mathscr{S})$,

$$|p - q| := \sup_{i \in [\![1,s]\!]} |p_i - q_i|.$$

Constante de temps

Si

- $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s) \in P(\mathscr{S})$
- $X_u \sim \sum_{i=1}^{s} p_i \delta_{s_i}$

On note $\mu(p)$ la constante de temps associée

Définition de λ

- a_n : nombre de chemins auto-évitants issus de 0 de longueur n

$$a_{m+n} \leq a_m a_n$$

- **Constante de connectivité** : il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} a_n^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n^{1/n}.$$

- $d^n \leq a_n \leq 2d(2d-1)^{n-1}$

$$d \leq \lambda \leq 2d - 1$$

Longueur de routes

- **Route** de u à v : $u \overset{\Gamma}{\leftrightsquigarrow} v$ tel que

$$T(\Gamma) = T(u, v)$$

- $T(u, v) \in \mathbb{N}$ donc les routes existent

Proposition

Soit N_k la longueur minimale d'une route de 0 à $k\varepsilon_1$. Alors

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{N_k}{k}$$

est uniformément bornée au voisinage de tout point $p \in P(\mathscr{S})$ tel que $|p| < \frac{1}{\lambda}$.

Longueur de routes

- **Route** de u à v : $u \overset{\Gamma}{\leftrightsquigarrow} v$ tel que

$$T(\Gamma) = T(u, v)$$

- $T(u, v) \in \mathbb{N}$ donc les routes existent

Proposition

Soit N_k la longueur minimale d'une route de 0 à $k\varepsilon_1$. Alors

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{N_k}{k}$$

est uniformément bornée au voisinage de tout point $p \in P(\mathscr{S})$ tel que $|p| < \frac{1}{\lambda}$.

Continuité de μ

Théorème

L'application

$$\begin{array}{rcl} \{p \in P(\mathscr{S}) \mid |p| < \frac{1}{\lambda}\} & \to & \mathbb{R}_+ \\ p & \mapsto & \mu(p) \end{array}$$

est continue.

Application aux coloriages aléatoires

Théorème (de forme asymptotique)

Soit un modèle de coloriage aléatoire. Notons μ la constante de temps associée. Alors deux cas sont possibles :

1. *Soit $\mu > 0$, et il existe un convexe compact déterministe d'intérieur non vide $B_0 \subseteq \mathbb{R}^d$, symétrique par rapport aux hyperplans d'équation $x_i = 0$, tel que, p.s., pour tout $\varepsilon > 0$, pour t assez grand, on ait*

$$(1-\varepsilon)B_0 \subseteq \frac{1}{t}B(t) \subseteq (1+\varepsilon)B_0.$$

2. *Soit $\mu = 0$, et, p.s., pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}^d$, pour t assez grand, on a*

$$K \subseteq \frac{1}{t}B(t).$$

Critère de distinction

Théorème

On a l'équivalence

$$\mu(p) > 0 \qquad \textit{si et seulement si} \qquad |p| < p_c(\mathbb{Z}^d,\ \textit{site}).$$

Passer la preuve

Rappels de percolation par site sur $\mathbb{Z}^d$

Définitions

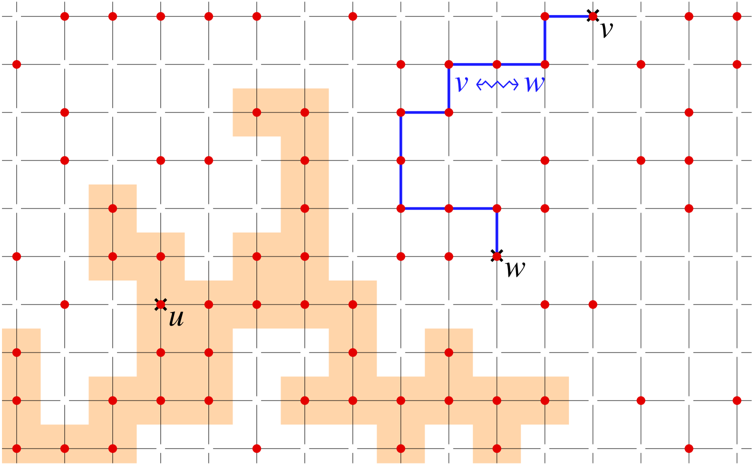
- famille de v.a. i.i.d. $(\tilde{X}_u)_{u\in\mathbb{Z}^d}$ de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$
- u est **ouvert** si $\tilde{X}_u = 1$, u est **fermé** si $\tilde{X}_u = 0$
- u et v **reliés** : $u \leftrightsquigarrow v$
- **cluster** (de percolation) de u :

$$\mathcal{C}(u) := \{v \in \mathbb{Z}^d \mid u \leftrightsquigarrow v\}$$

$$C(u) = \begin{cases} \mathscr{C}(u) & \text{si } X_u = 1 \\ \varnothing & \text{si } X_u = 0 \end{cases}$$

Rappels de percolation par site sur $\mathbb{Z}^d$

Illustration



Rappels de percolation par site sur $\mathbb{Z}^d$

Clusters infinis

Théorème

Il existe $p_c(\mathbb{Z}^d,\ \mathit{site}) \in (0, 1)$ *tel que*

1. *pour tout* $p < p_c(\mathbb{Z}^d,\ \mathit{site})$*, il n'existe p.s. pas de cluster infini,*
2. *pour tout* $p > p_c(\mathbb{Z}^d,\ \mathit{site})$*, il existe p.s. un unique cluster infini.*

Ce théorème ne dit pas ce qu'il se passe à $p = p_c(\mathbb{Z}^d,\ \text{site})$...

Animaux

Définitions

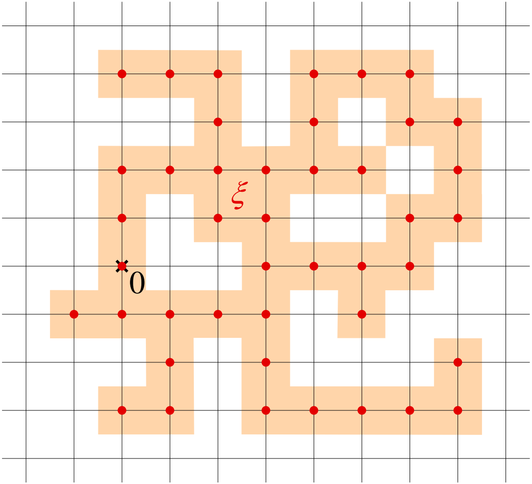
- **animal** : sous-ensemble fini ξ de $\mathbb{Z}^d$ contenant l'origine et tel que le graphe

$$\left(\xi, \left\{\{u, v\} \in \mathbb{E}^d \mid u, v \in \xi\right\}\right)$$

  soit connexe
- ensemble des animaux de taille l :

$$\Xi(l) := \{\xi \text{ animal} \mid |\xi| = l\}$$

Animaux
Illustration



Animaux
Théorèmes

Théorème (de COX GANDOLFI GRIFFIN KESTEN)

Soit $(Z_u)_{u\in\mathbb{Z}^d}$ *une famille de v.a. positives i.i.d. telle que* $\mathbb{E}\left[Z_u^{d+\varepsilon}\right] < \infty$ *pour un* $\varepsilon > 0$. *Alors, p.s.,*

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi\in\Xi(l)} \sum_{u\in\xi} Z_u < \infty.$$

Théorème

Si $p < p_c$, *alors, p.s.,*

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi\in\Xi(l)} \sum_{u\in\xi} |\mathcal{C}(u)| < \infty.$$

Animaux

Théorèmes

Théorème (de Cox Gandolfi Griffin Kesten)

Soit $(Z_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}$ *une famille de v.a. positives i.i.d. telle que* $\mathbb{E}\left[Z_u^{d+\varepsilon}\right] < \infty$ *pour un* $\varepsilon > 0$*. Alors, p.s.,*

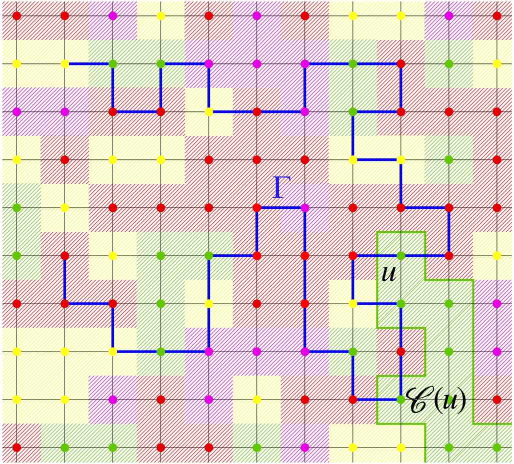
$$\limsup_{l \to \infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \sum_{u \in \xi} Z_u < \infty.$$

Théorème

Si $p < p_c$*, alors, p.s.,*

$$\limsup_{l \to \infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \Xi(l)} \sum_{u \in \xi} |\mathcal{C}(u)| < \infty.$$

Preuve du théorème de distinction
Minoration de μ



Définition des coloriages dépendants

On ne suppose plus $(X_u)_{u\in\mathbb{Z}^d}$ i.i.d. mais

- de loi invariante par translation
- ergodique

Tribu des événements qui ne dépendent pas de ce qu'il se passe en u :

$$\mathcal{G}_u := \sigma\left(X_v, v \in \mathbb{Z}^d \backslash \{u\}\right)$$

Critère de distinction dans le cas dépendant

Théorème

Pour que toutes les constantes de temps soient strictement positives, il suffit que

$$\sup_{i \in [\![1,s]\!]} \mathbb{P}(X_0 = s_i \mid \mathscr{G}_0) < p_c.$$

En notant p la loi des X_u conditionnellement à $\mathscr{G}_u$, on retrouve la même condition que dans le cas indépendant, à savoir $|p| < p_c$

Application aux coloriages aléatoires

Voir sur mon site :

www.eleves.ens.fr/home/bettinel/Fpp.html

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Olivier GARET qui m'a proposé ce sujet et m'a aidé, conseillé et encadré tout au long de la rédaction de mon mémoire, ainsi que Bernard BETTINELLI, Nicolas CURIEN, Hugo DUMINIL, Thibault ESPINASSE et Adrien JOSEPH pour leur relecture attentive.